Concours Blanc de Physique-Chimie

Durée de l'épreuve : 4h

Consignes :

- Le candidat est invité à conserver les notations de l'énoncé.
- Le barème est donné à titre indicatif afin que le candidat puisse gérer son temps au mieux.

Dans tout le sujet l'accélération de pesanteur est notée $g = 9,81\text{ms}^{-2}$.

1 Énergie thermique des mers (12 points)

Une centrale thermique expérimentale, dans une zone tropicale, utilise comme source chaude (SC) l'eau de la surface de l'océan et comme source froide (SF) l'eau prise en profondeur.

On considère que l'eau de surface est à $t_2 = 27°\text{C}$ et que l'eau en profondeur est à $t_1 = 7°C$.

On s'intéresse au rendement théorique d'une telle machine réversible. Au cours d'un cycle, le fluide échange avec le milieu extérieur Q_2 avec la SC, Q_1 avec SF et un travail W.

1. Déduire l'expression du travail W en fonction de Q_1, T_2 et T_1. (3)

L'eau chaude étant gratuite, le coût essentiel du fonctionnement provient du travail qu'il faut fournir pour pomper une masse m_1 d'eau froide. Le maintient d'une température de la SF rigoureusement constante nécessiterait le pompage d'une quantité infinie d'eau à chaque cycle. On tolère une variation $\Delta T_1 = 2$ K de la température de la source froide.

On note c la capacité thermique massique de l'eau. $c = 4185\ \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

2. Donner dans ces conditions, l'expression de Q_1 et en déduire l'expression de W. Vous discuterez les signes des échanges proprement.(2)
3. Déterminer l'expression de la poussée d'Archimède s'exerçant sur une masse m d'eau de volume V à T_1, plongée dans l'eau à T, en fonction de la masse m et des masses volumiques de l'eau $\rho(T_1)$ et $\rho(T)$.(1)
4. En déduire l'expression de la force qu'il faut exercer sur cette masse d'eau pour la maintenir à l'équilibre.(1)
5. Calculer le travail W' qu'il faut fournir pour amener la masse d'eau m_1, de la profondeur h_1 (température T_1) à la surface (température T_2) sachant que :
$$\rho(T) = \frac{\rho(T_1)}{1 + a(T - T_1)} \qquad \text{avec} \qquad T = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{h_1}h$$
On suppose que la température de l'eau pompée ne varie pas. (3)
Aide : on propose le changement de variable :$u = 1 + a(T_2 - T_1)(1 - \frac{h}{h_1})$
6. Calculer le rendement (efficacité) $|W/W'|$ de la centrale sachant que $a = 10^{-3}$ et $h_1 = 400$m (2)

Correction :

1. La variation d'énergie interne est nulle au cours du cycle donc $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$ soit $W = -Q_1 - Q_2$.
La variation d'entropie est nulle au cours du cycle : $DeltaS = 0 = Q_1/T_1 + Q_2/T_2$.
En combinant les deux expressions on trouve : $W = Q_1(\frac{T_2}{T_1} - 1)$.
2. Il faut appliquer le premier principe à la source froide : $\Delta U_1 = m_1 c\Delta T_1 = -Q_1$ car Q_1 est défini par rapport à la machine thermique.
$$W = -m_1 c\Delta T_1(\frac{T_2}{T_1} - 1) = m_1 c\Delta T_1(1 - \frac{T_2}{T_1})$$

3. La poussée d'Archimède est égale au poids du volume de fluide déplacé :
$$\Pi = Vg\rho(T) = mg\frac{\rho(T)}{\rho(T_1)}$$
4. Soit F cette force, P le poids, $F = |P - \Pi| = |mg - mg\frac{\rho(T)}{\rho(T_1)}|$
5. Dans cette question il faut réexprimer F puis calculer le travail en utilisant $dW' = Fdh$
$$F = m_1 g\left(1 - \frac{1}{1 + a(T_2 - T_1)(1 - \frac{h}{h_1})}\right)$$
On pose $u = 1 + a(T_2 - T_1)(1 - \frac{h}{h_1}$ soit $du = -a(T_2 - T_1)\frac{dh}{h_1}$; $dh = \frac{-h_1}{a(T_2-T_1)}du$. Finalement,
$$W' = \int_0^{h_1} Fdh = m_1 g\int_0^{h_1} dh + m_1 g\frac{h_1}{a(T_2 - T_1)}\int_0^{h_1}\frac{du}{u}$$
L'intégration donne :
$$W' = m_1 g\left(h_1 - \frac{h_1}{a(T_2 - T_1)}\ln\left(a(T_2 - T_1) + 1\right)\right)$$
6. En ODG $rdt = 15$

2 Étude du séismographe (14 points)

Un séisme ou tremblement de terre est une secousse du sol résultant de la libération brusque d'énergie accumulée par les contraintes exercées sur les roches. Cette libération d'énergie provient de la rupture des roches le long d'une faille préexistante, d'une activité volcanique. Elle peut être aussi d'origine artificielle (explosions par exemple). Les mouvements des roches engendrent des vibrations élastiques qui se propagent, sous la forme de paquets d'ondes sismiques, autour et au travers du globe terrestre. Les mouvements du sol sont étudiés par l'intermédiaire de sismographes. L'acquisition et l'enregistrement du signal s'obtiennent dans une station sismique regroupant, outre les sismographes eux-mêmes, des enregistreurs, des numériseurs, des horloges et des antennes GPS.

Un sismographe simple (figure 1) est constitué d'un support rigide de hauteur h, auquel on suspend une masse m, supposée ponctuelle, par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable de raideur k, de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ. Cet amortisseur exerce une force sur la masse m, $\overrightarrow{F_a} = \lambda\frac{d}{dt}(h - z)\overrightarrow{u_z}$.

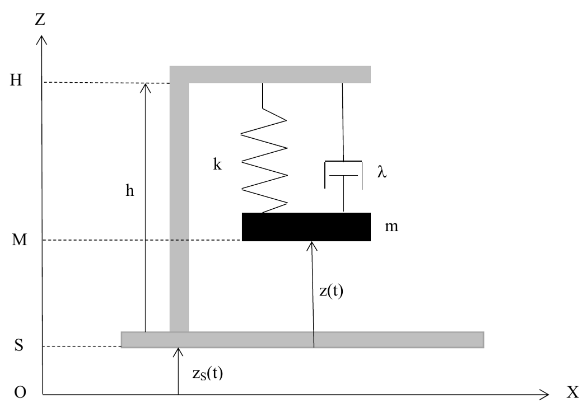


Figure 1 - Sismographe

Un mouvement vertical du sol déclenche un mouvement vertical de la masse m caractérisé par la fonction $z(t)$ dans le référentiel lié au sol.

On pose : $z(t) = z_{eq} + u(t)$. La position $z = z_{eq}$ correspond à la position d'équilibre de la masse m en l'absence de séisme et $u(t)$ représente l'écart par rapport à l'équilibre.
On modélise une composante en fréquence de la vibration verticale du sol par rapport à un référentiel galiléen (O, X, Y, Z) au moyen de la fonction : $z_s(t) = Z_0\cos(\omega t)$.

1. Écrire l'équation différentielle qui relie $z(t)$, $z_s(t)$, m, g, λ, h, k et l_0. Préciser l'expression de z_{eq}, puis l'équation différentielle qui relie $u(t)$, $z_s(t)$, m, λ et k. (5)

Le sismographe peut être assimilé à un système linéaire de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{z_s}(t)}$$

On donne sur la figure 2 les diagrammes de Bode en amplitude pour des filtres du second ordre.

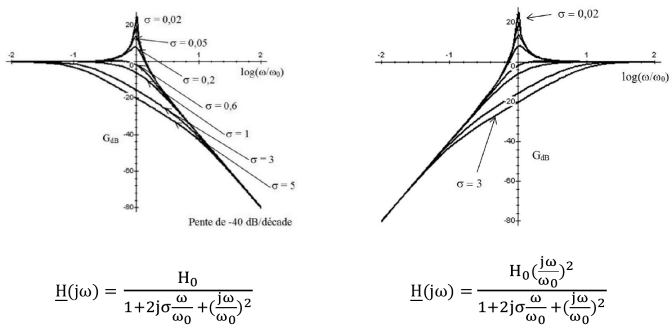


Figure 2 - Diagrammes de Bode en amplitude

2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du sismographe en fonction de m, k, λ, ω et j, nombre complexe tel que $j^2 = -1$. De quel type de filtre s'agit-il ?(3)

3. Préciser l'expression de l'amplitude maximale U de la réponse verticale $u(t)$ du régime forcé de la masse m en fonction de Z_0, m, k, λ et ω.(3)

4. Écrire deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude U du mouvement de la masse soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. La suspension est-elle qualifiée de souple ou de rigide ? La masse vibre-t'elle en phase, en quadrature de phase ou en opposition de phase avec le sol ? (2)

5. Le cahier des charges du sismographe impose d'éviter tout phénomène de résonance, ce qui impose une condition supplémentaire sur la grandeur sans dimension $\frac{\lambda}{\sqrt{km}}$. Préciser cette condition supplémentaire à l'aide d'une inégalité.(2)

Correction :

1. On se place dans le référentiel galiléen auquel est attaché le repère (O, X, Y, Z). On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté suivant (O_Z).

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(z + z_\text{s}) = -m \cdot g - \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (h - z - \ell_0), \tag{1}$$

soit :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (z + \ell_0 - h) = -m \cdot \left(g + \frac{d^2 z_\text{s}}{dt^2}\right).} \tag{2}$$

En l'absence de mouvement du sol, à l'équilibre, $\frac{dz}{dt} = 0$ et $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, d'où :

$$k \cdot (z_\text{éq} + \ell_0 - h) = -m \cdot g. \tag{3}$$

On pose u tel que $z = z_\text{éq} + u$. Alors :

$$m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot (z_\text{éq} + \ell_0 - h + u) = m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u - m \cdot g = -m \cdot \left(g + \frac{d^2 z_\text{s}}{dt^2}\right), \tag{4}$$

soit finalement :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u = -m \cdot \frac{d^2 z_\text{s}}{dt^2}.} \tag{5}$$

2. On passe en notation complexe :
$$-\omega^2 \cdot m \cdot \underline{u} + \jmath \cdot \omega \cdot \lambda \cdot \underline{u} + k \cdot \underline{u} = +\omega^2 \cdot m \cdot \underline{z}_{\mathrm{s}}, \tag{6}$$
soit :
$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{z}_{\mathrm{s}}} = \frac{\omega^2 \cdot m}{-\omega^2 \cdot m + \jmath \cdot \omega \cdot \lambda + k}. \tag{7}$$
On factorise par k pour obtenir la forme présentée dans l'énoncé :
$$\boxed{\underline{H} = \frac{\dfrac{m}{k} \cdot \omega^2}{1 + \jmath \cdot \omega \cdot \dfrac{\lambda}{k} - \dfrac{m}{k} \cdot \omega^2}.} \tag{8}$$
Il s'agit d'un filtre passe-haut du deuxième ordre.

3. Ayant $U = |\underline{H}| \cdot Z_0$, il vient :
$$\boxed{U = \frac{\dfrac{m \cdot \omega^2}{k} \cdot Z_0}{\left(1 - \dfrac{m \cdot \omega^2}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda \cdot \omega}{k}\right)^2}.} \tag{9}$$

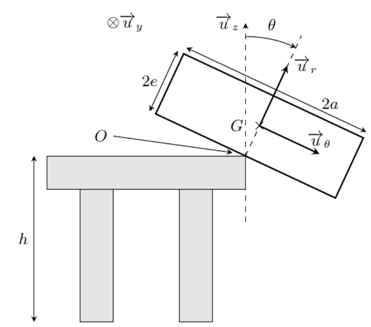
4. L'amplitude des déplacements de la masse reproduira celle du sol si numérateur et dénominateur s'égalisent, si :
$$1 \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda \cdot \omega}{k} \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k}, \tag{10}$$
donc si :
$$\boxed{\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega \gg \frac{\lambda}{m}.} \tag{11}$$
La deuxième relation traduit un amortissement faible, donc une suspension souple. En outre, les conditions précédentes étant remplies, on a $\underline{H} \sim -1$, donc les signaux sont en opposition de phase.

5. D'après les courbes d'amplitude données dans l'énoncé, il n'y a pas résonance lorsque $\sigma \gtrsim 0,6$. Par identification avec la relation (8),
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2 \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \cdot \frac{\lambda}{k}, \tag{12}$$
soit :
$$\sigma = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}}. \tag{13}$$
On évitera donc la résonance lorsque :
$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 0,6, \qquad \boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 1,2.} \tag{14}$$

3 La loi de Murphy (20 points)

La loi de Murphy s'énonce ainsi : "Tout ce qui est susceptible de mal tourner, tournera mal". Un corolaire important de celle loi est la loi dite de la tartine beurrée. Nous nous proposons de vérifier cette loi grâce à des outils de mécanique du solide.

Soit une tartine homogène de longueur $2a = 8$cm, de largeur $2b$, d'épaisseur $2e = 0,8\,\mathrm{cm}$ et de masse m posée sur une table. Par inadvertance, une personne la pousse irrémédiablement vers sa perte (i.e. le bord de la table). Quand le milieu de la tartine atteint le bord de la table, la tartine amorce un mouvement de rotation autour de l'axe Oy.



L'action de la table sur la tartine est modélisée par $\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{u_r} + T\overrightarrow{u_\theta}$. On note θ l'angle entre la tartine et la verticale (cf. schéma). On donne le moment d'inertie de la tartine autour de Oy :
$$J = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2)$$

3.1 Bascule de la tartine (20 points)

Dans cette partie, nous tâcherons de décrire le comportement de la tartine tant qu'elle reste en contact avec le bord de la table.

1. Effectuer un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la tartine. S'agit–il d'un système conservatif ?(1)
2. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de la tartine en fonction de θ.
   L'origine des potentiels sera choisie telle que $E_p(\theta = \pi/2) = 0$.(1)
3. En déduire que l'énergie mécanique vaut (2) :
$$E_m = \frac{1}{6}m(a^2 + 4e^2)\dot{\theta}^2 + mge\cos\theta\,.$$
4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique (entre 0 et θ angle quelconque avant glissement) déterminer la valeur littérale de l'énergie mécanique.(2)
5. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de θ s'écrit (2):
$$\ddot{\theta} - 3\frac{ge}{a^2 + 4e^2}\sin\theta = 0\,.$$
6. Obtenir le résultat précédent à partir du théorème du moment cinétique.(2)
7. En appliquant le principe fondamental de la dynamique déterminer l'expression des composantes de la réaction N et T . En considérant que $a \gg e$, montrer qu'ils peuvent se réécrire $T = mgsin\theta$ et $N = mgcos\theta$.(2)
8. La tartine ne peut quitter la table sans glisser. Sachant que le coefficient de frottement table/tartine est $f = 1$ et que le glissement démarre lorsque $|T| = f|N|$, déterminer l'angle θ_0 pour lequel la tartine commence à glisser.(2)
9. En déduire l'expression de la vitesse angulaire de la tartine $\omega_0 = \dot{\theta(t_0)}$ a l'instant t_0 où la tartine quitte la table.(2)

3.2 La chute !

À partir de l'instant t_0 , pris comme nouvelle origine des temps, la tartine commence son inexorable chute. On suppose qu'elle conserve sa vitesse de rotation ω_0 et que la chute commence telle que $\theta_0 \approx 0,8\,\mathrm{rad}$ et le centre de gravité de la tartine possède une vitesse nulle.

Rappelons que le mouvement d'un solide peut être décrit comme la combinaison du mouvement de son centre de gravité (considéré comme un système ponctuelle de la masse identique à celle du solide) et du mouvement de rotation du solide par rapport à son centre de gravité.
Rappelons également qu'une tartine est largement plus petite qu'un table et que le schéma est volontairement exagéré pour un souci de lisibilité.

10. Quelle est la loi d'évolution de l'altitude du centre de gravité $z_G(t)$?(0.5)
11. Quelle est le temps mis par la tartine pour atteindre le sol ? On supposera une table de hauteur $h = 70\,\mathrm{cm}$ et $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. (0.5)
12. Déduire des résultats précédent l'expression de $\theta(\tau)$, l'angle que fait la tartine par rapport à la verticale au moment de l'impact. De quel côté tombe la tartine ? (1)
13. Prendre son petit–déjeuner sur la lune permet–il de résoudre le problème ?(2)

Correction :

1. Réaction de la table (seulement N car pas de glissement) ne travaille pas et poids conservatif : système conservatif. (/1)

2. $E_p = mgz - E_0 = mge\cos\theta$ (/1)

3. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + E_p$

4. $\Delta E_m = 0$ donc $E_m = E_m(0) = mge$ car vitesse angulaire nulle initialement. (/2)

5. $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{3}(a^2+4e^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} - mge\dot{\theta}\sin\theta = 0...$

6. TMC pour un solide en rotation autour d'un axe fixe : $J\ddot{\theta} = (\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{P})\cdot\overrightarrow{u_{z2}} = emg\sin\theta$ donc $\frac{1}{3}(a^2+4e^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} = emg\sin\theta$.

7. On écrit le PFD et on néglige les termes en e... (/1)

8. Condition de glissement équivalente à $\sin\theta_0 = f\cos\theta_0$ donc $\theta > \theta_0 = arctan(1)$. (/1)

9. $E_m = mge = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + mge\cos\theta_0$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{2mge(1-\cos\theta_0)}{J}} \approx 6,44\,\text{rad/s}$ (/2)

10. Chute libre d'un point matériel dans le champs de pesanteur terrestre : $z_G(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

11. $\tau = 0,37\,\text{s}$ (/1)

12. $\theta(\tau) = \theta_0 + \omega_0\tau \approx 3,18 \approx \pi\,\text{rad}$
La tartine fait approximativement un demi–tour lors de sa chute, elle tombe coté beurre. (/1)

13. Refaire les applications numériques ou alors écrire $\theta(\tau) = \sqrt{\frac{2mge(1-\cos\theta_0)}{J}}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ et constater que l'expression ne dépend pas de g et donc changer de planète ne permet pas d'éviter le drame. (/2)

4 Bilan de la correction

4.1 Exercice 1

1. Lorsque deux sous-systèmes communiquent, il faut écrire les principes de la thermo pour chacun d'entre eux, en prenant garde au sens des échanges.
2. Ne pas sortir des expressions issues de vague souvenirs d'exercices, il faut rédémontrer.
3. Revoir la poussé d'Archimède et les intégrales avec changement de variable.

4.2 Ex2

1. Conserver les notations de l'énoncé, ne pas utiliser ℓ_{eq} mais z_{eq}
2. Attention, la force d'un ressort s'écrit $\overrightarrow{F} = -k(\ell-\ell_0)\overrightarrow{u}$ avec ℓ la longueur du ressort à exprimer en fonction des paramètres du problème, l'expression n'est pas forcément simple !!!
3. la vitesse n'est pas une force
4. Le PDF ne peut pas s'écrire dans un référentiel non Galiléen
5. Ne pas utiliser de notations mélangeant les expressions littérales et des termes calculés.

4.3 Ex3

1. Revoir la notion de force conservative : il faut bien justifier cette question.
2. Pour un solide en rotation l'énergie cinétique s'écrit avec le moment d'inertie, la formule $1/2mv^2$ n'a pas de sens !
3. Toutes les justifications doivent venir des équations et pas de l'intuition.