Vecteurs cinématiques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{u_x} \qquad \text{car z=0 et y=0} \\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{a} &= \ddot{x}\overrightarrow{u_x} \end{aligned}$$

Vecteurs cinématiques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{u_x} \qquad \text{car z=0 et y=0}\\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}\overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{a} &= \ddot{x}\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Bilan des forces :

$$\text{Poids :}\ \overrightarrow{P} = -mg\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_y}\right)$$

Vecteurs cinématiques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{a} &= \ddot{x}\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

car z=0 et y=0

Bilan des forces :

$$\begin{aligned}\text{Poids : } \overrightarrow{P} &= -mg\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_y}\right) \\ \text{Traction : } \overrightarrow{T} &= T\left(\sin\beta\overrightarrow{u_x} + \cos\beta\overrightarrow{u_y}\right) \\ \text{Réaction normale : } \overrightarrow{Rn} &= Rn\overrightarrow{u_y} \\ \text{Réaction tangentielle : } \overrightarrow{Rt} &= -Rt\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Vecteurs cinématiques :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$$

Bilan des forces :

$$\overrightarrow{P} = -mg\left(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_y}\right)$$
$$\overrightarrow{T} = T\left(\sin\beta\overrightarrow{u_x} + \cos\beta\overrightarrow{u_y}\right)$$
$$\overrightarrow{Rn} = Rn\overrightarrow{u_y}$$
$$\overrightarrow{Rt} = -Rt\overrightarrow{u_x}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{Rn} + \overrightarrow{Rt}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = -mg\sin\alpha + T\sin\beta - Rt \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_x} \\ 0 & = -mg\cos\alpha + T\cos\beta + Rn \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{cases} (a) & m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + T\sin\beta - Rt & \text{suivant}\,\overrightarrow{u_x} \\ (b) & 0 = -mg\cos\alpha + T\cos\beta + Rn & \text{suivant}\,\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

Propriété : $Rt = f_d Rn$

$$\begin{cases} (a) & m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + T\sin\beta - f_d Rn & \\ (b) & 0 = -mg\cos\alpha + T\cos\beta + Rn & \times f_d \end{cases}$$

$$(a) + (b) \Rightarrow m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

Or d'après l'énoncé, la vitesse est **constante** donc $\ddot{x} = 0$

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

Or d'après l'énoncé, la vitesse est **constante** donc $\ddot{x} = 0$

$$0 = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

Or d'après l'énoncé, la vitesse est **constante** donc $\ddot{x} = 0$

$$0 = -mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha) + T(\sin\beta + f_d\cos\beta)$$

$$T = \frac{mg(\sin\alpha + f_d\cos\alpha)}{(\sin\beta + f_d\cos\beta)}$$

Énoncé :

Calculez la vitesse vo nécessaire à ce que le lugiste décolle ?

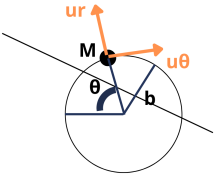
On considère que le lugiste peut se ramener à un point matériel ponctuel, de masse m.
L'étude est menée dans le repère terretre supposé galiléen.

Vecteurs cinématiques :

$$\overrightarrow{OM} = b\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v} = b\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad \text{car b est constant}$$

$$\overrightarrow{a} = b\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - b\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$



b : rayon de la bosse

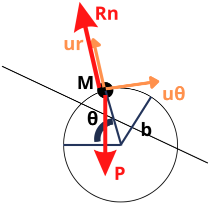
θ_0 angle de départ sur la bosse

Vecteurs cinématiques :

$$\overrightarrow{OM} = b\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v} = b\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad \text{car b est constant}$$
$$\overrightarrow{a} = b\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - b\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$

Bilan des forces :

$$\overrightarrow{R_n} = R_n\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{P} = -mg(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$$



b : rayon de la bosse
θ_0 angle de départ sur la bosse

Vecteurs cinématiques :

$$\overrightarrow{OM} = b\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v} = b\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a} = b\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - b\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$

Bilan des forces :

$$\overrightarrow{R_n} = R_n\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{P} = -mg(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Rn}$$

Projection : $$\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 & = R_n - mg\sin\theta \qquad \text{suivant}\overrightarrow{u_r} \\ mb\ddot{\theta} & = -mg\cos\theta \qquad \text{suivant}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 & = R_n - mg\sin\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_r} \\ mb\ddot{\theta} & = -mg\cos\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

Expression de Rn :

$Rn = mg\sin\theta - mb\dot{\theta}^2$

Objectif : exprimer $\dot{\theta}^2$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 & = R_n - mg\sin\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_r} \\ mb\ddot{\theta} & = -mg\cos\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

Expression de Rn :

$$Rn = mg\sin\theta - mb\dot{\theta}^2$$

Objectif : exprimer $\dot{\theta}^2$

$$mb\ddot{\theta}\times\dot{\theta} = -mg\cos\theta\times\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(mg\sin\theta\right)$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 & = R_n - mg\sin\theta \qquad \text{suivant} \vec{u_r} \\ mb\ddot{\theta} & = -mg\cos\theta \qquad \text{suivant} \vec{u_\theta} \end{cases}$$

Expression de Rn :

$$Rn = mg\sin\theta - mb\dot{\theta}^2$$

Objectif : exprimer $\dot{\theta}^2$

$$mb\ddot{\theta}\times\dot{\theta} = -mg\cos\theta\times\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(mg\sin\theta\right)$$

$$mb\dot{\theta}^2 - m\,\underbrace{b\dot{\theta_0}^2}_{v_0^2/b} = 2mg\sin\theta_0 - 2mg\sin\theta$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 &= R_n - mg\sin\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_r} \\ mb\ddot{\theta} &= -mg\cos\theta \qquad \text{suivant}\,\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

Expression de Rn :

$$Rn = mg\sin\theta - mb\dot{\theta}^2$$

Objectif : exprimer $\dot{\theta}^2$

$$mb\ddot{\theta}\times\dot{\theta} = -mg\cos\theta\times\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(mg\sin\theta\right)$$

$$mb\dot{\theta}^2 - m\,\underbrace{b\dot{\theta}_0{}^2}_{v_0^2/b} = 2mg\sin\theta_0 - 2mg\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{b^2} + \frac{2g}{b}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

Bilan

Expression de Rn :

$Rn = mg\sin\theta - mb\dot{\theta}^2$

Expression de $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{b^2} + \frac{2g}{b}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

$$Rn = mg(3\sin\theta - 2\sin\theta_0) - \frac{mv_0^2}{b}$$

Décollage si $Rn \leq 0$

C'est à dire si

$$v_0^2 \geq bg \times \underbrace{(3\sin\theta - 2\sin\theta_0)}_{f(\theta)\ fmax=3-2\sin\theta_0}$$

$$v_0^2 \geq bg(3 - 2\sin\theta_0)$$

Discussion

$$Rn = 0 \Leftrightarrow v_0^2 = bg\big(3\sin\theta - 2\sin\theta_0\big)$$

Condition de décollage en θ_0

$$v_{0,i} \geq \sqrt{bg\sin\theta_0}$$

Condition de décollage si $v_0 < v_{0,i}$

$$v_0^2 = bg\big(3\sin\theta_1 - 2\sin\theta_0\big)$$

$$\theta_1 = \arcsin\Big(\frac{v_0^2}{bg} + \frac{2}{3}\sin\theta_0\Big)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{bg} + \frac{2}{3}\sin\theta_0 \leq 1$$

Possible uniquement si $v_0 \leq v_1 = \sqrt{bg(1 - \frac{2}{3}\sin\theta_0)}$

Discussion

Comparaison de $v_{0,i}$ et v_1 :

$$v_{0,i}^2 - v_1^2 = bg\sin\theta_0 - bg(1 - \frac{2}{3}\sin\theta_0) = \frac{5}{3}bg\sin\theta_0 - bg$$

donc $v_{0,i} > v_1 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sin\theta_0 > 1$
Soit $\theta_0 > arcsin(3/5)$

Bilan

Si $\theta_0 > arcsin(3/5)$

$v_{0,i} > v_1$ donc si $v_0 < v_1$ décollage en θ_1
si $v_1 < v_0 < v_{0,i}$ pas de décollage
si $v_0 > v_{0,i}$ décollage en θ_0

Si $\theta_0 < arcsin(3/5)$

$v_{0,i} < v_1$ si $v_0 > v_{0,i}$ décollage en θ_0
si $v_0 < v_{0,i}$ pas de décollage