

Fondements de la Dynamique

La dynamique permet de relier les causes du mouvement et leurs conséquences. Ce chapitre vise à développer les premières lois de la mécanique dites lois de Newton. Elles vont nous permettre d'étudier bon nombre de situations de mécanique. Ces lois sont des principes (on parle parfois de postulats) et ne sont pas "démonstrables", elles sont issues de l'observation de divers phénomènes et sont en quelque sorte une "mathématisation ad hoc" de la réalité afin de développer des outils d'analyse nous permettant d'appréhender la réalité. Nous nous limiterons à l'étude de la mécanique classique : la mécanique des objets à l'échelle (i.e. la mécanique quantique) et la mécanique des objets à grande vitesse (i.e. la relativité restreinte, et d'autant plus la générale) seront laissées de côté de part leur difficulté conceptuelle et le besoin de maîtriser les bases classiques.

Objectifs :

- Forces, principe des actions réciproques
- PDF, principe d'inertie
- Poussée d'Archimède, frottements fluides

Compétences :

- Proposer un protocole de TP : Pendule simple
- Déterminer les équations du mouvement
- Approche numérique d'une ED : TP Bad

1 Concept de masse

La masse est un concept un peu particulier : sur Terre on ne mesure que le poids, ou les effets de la masse sur les actions mécaniques.

Sa définition vient de la relativité restreinte :

$$M = \frac{1}{c^2} E$$

elle s'exprime en kg, avec c la célérité de la lumière et E l'énergie totale de l'objet.

La masse ne se conserve pas : la somme des masses des constituants de l'atome est supérieure à la masse de l'atome lui-même, à cause des effets énergétiques.

La mécanique newtonnienne est une approximation dans laquelle on néglige ces effets, on considère donc dans la suite que la masse est additive.

2 Modélisation d'une action mécanique par une force

2.1 Définition

★ Force et mouvement ♡

Une force peut modifier le mouvement d'un corps, c'est à dire modifier sa vitesse et/ou sa trajectoire.

Une force est caractérisée par une direction, un sens et une valeur.

Elle s'exprime en Newton de symbole N.

De façon générale on peut dire que :

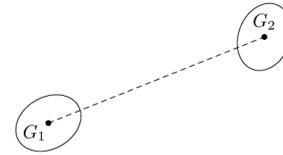
- Une force ne vient pas de nulle part : il y a toujours un agent ou opérateur qui exerce la force.
- Une force peut être de **contact** ou à **distance**. Hormis la force de gravitation (et donc le poids) et la force électromagnétique, la plupart des forces sont des forces de contact.
- Une force ne dépend pas du référentiel dans lequel le mouvement est étudié.
-

3 Les forces dont l'expression est connue

3.1 Gravitation

★ Force de gravitation ♡

L'interaction gravitationnelle entre deux corps ponctuels A et B, de masse respective m_A et m_B , séparés d'une distance d est modélisée par des forces d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$.



Les propriétés de cette interaction sont les suivantes :

- Direction : selon la droite (G_1G_2) de vecteur directeur unitaire \vec{u} (pointant vers G_2).
- Sens : $\vec{F}_{1/2}$ la force exercée par G_1 sur G_2 et pointe vers G_1 , le centre attracteur.
- Valeur : s'exprime à l'aide de la constante de gravitation (ou constante de Cavendish) $G=6,67 \times 10^{-11} \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = -G \frac{m_A m_B}{d^2} \vec{u}$$

Les masses s'expriment en kilogrammes. Les distances s'expriment en mètres.

La force de gravitation s'applique au centre de masse. Elle est toujours attractive.

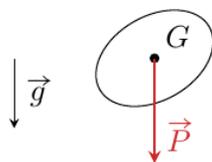
La loi de la gravitation s'applique à tout objet, sur Terre ou dans l'espace, on dit qu'elle est **universelle**. C'est cette même force qui fait tourner les planètes du système solaire autour du Soleil et qui fait tomber la pomme au sol quand on la lâche.

3.2 Force de pesanteur sur Terre

La Terre exerce donc une attraction sur tous les objets et les corps qui l'entoure. Pour les corps situés à sa surface, c'est à dire à une distance $d = R_T$ du centre de la Terre (R_T étant le rayon terrestre), la force gravitationnelle $F_{T/corps}$ exercée par la Terre sur les corps de masse m prend le nom particulier de **poinds**.

$$F_{T/corps} = m \times \underbrace{G \frac{M_T}{R_T^2}}_g \quad (1)$$

★ Pesanteur ♡



surface terrestre

À la surface de la Terre, un corps de masse m est soumis à la pesanteur (attraction gravitationnelle de la Terre). Cette force est appelée le **poinds**, se représente avec le vecteur \vec{P} de direction verticale, et de sens vers le bas. Sa valeur s'exprime en Newton (N) et est

$$P = mg \quad (2)$$

g est l'accélération de pesanteur et s'exprime en $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$

m est la masse du corps en kg.

La Terre n'étant pas parfaitement sphérique, la valeur de g varie sur le globe. On pourra retenir une valeur moyenne de $g = 9,81 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Exercice corrigé

Une combinaison spatiale doit permettre à un astronaute de survivre plusieurs heures dans l'espace, un endroit très hostile à la vie avec des températures extrêmes et un vide presque total. C'est pour cette raison qu'elles sont très lourdes. Celle de Thomas Pesquet pèse 127 kg sur Terre. On considère pour l'exercice que Thomas Pesquet pèse 85 kg. Donnée : l'accélération de pesanteur vaut $g_T = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$ sur Terre et $g_L = 1,62 \text{ N.kg}^{-1}$.

Question 1 : Quelle est la masse totale de l'astronaute et de son équipement ?

Question 2 : Calculer le poids de l'astronaute et de son équipement sur Terre.

Question 3 : Calculer le poids de l'astronaute et de son équipement sur la Lune.

3.3 Force électromagnétique

C'est une interaction à la fois électrique et magnétique. Nous nous intéresserons uniquement à l'interaction électrique. L'interaction électrique est une interaction qui existe entre tous corps qui possèdent une charge.

★ Interaction électromagnétique ♡

La loi d'interaction électrique a été établie par Coulomb : deux corps ponctuels A et B de charges respectives q_A et q_B et distants de d exercent l'un sur l'autre une force d'intensité

$$F_{B/A} = F_{A/B} = k \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{d^2} \quad (3)$$

avec $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, q_A et q_B en C, d en m. $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ la permittivité diélectrique du vide.

Selon cette expression, cette interaction peut être attractive si A et B portent des charges de signes opposés et répulsive si A et B portent des charges de même signe.

3.4 Force de rappel élastique

Voir oscillateur harmonique

3.5 Poussée d'Archimède

Archimède de Syracuse 287 av. J.C.-212 av. J.C. : physicien, mathématicien, ingénieur grec (de Sicile)

★ Énoncé ♡

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression s'appliquant au système est égale au poids de fluide déplacé et orientée vers le haut. Cette force s'applique en un point appelé le centre de poussée :

$$\vec{P} = -m_f \vec{g}$$

C'est une force de contact répartie que l'on peut modéliser par une force localisée au centre de poussée.

Si le système est immergé dans plusieurs fluides il faut prendre en compte tous les fluides !

3.6 Force de frottement fluide

★ Frottement Fluide ♡

Un système en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un fluide subira une force de frottement fluide \vec{f} .

— Pour de faibles vitesses : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

— Pour de grandes vitesses : $\vec{f} = -\alpha' v \vec{v}$

avec α et α' coefficients dépendant du fluide, de la forme du solide, du régime de vitesse...

Le changement de régime de frottement, vient du fait qu'à faible vitesse l'écoulement est dit laminaire : il suit le profil de l'objet et les frottements sont minimaux. À haute vitesse, l'écoulement devient turbulent ce qui augmente les frottements.

4 Lois de Newton

4.1 Le principe d'inertie

Énoncé historique

Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement **rectiligne uniforme** si les forces qui s'exercent sur lui se compensent.

Sir Isaac Newton 1686 sur intuition de Galilée en 1639

http://www.ostralo.net/3_animations/swf/PrincipeInertie.swf

★ Énoncé moderne ♡

Dans un référentiel dit galiléen ou inertiel, un point matériel ne subissant aucune interaction persiste dans son état initial (repos ou translation rectiligne uniforme).

Il faut noter qu'en l'absence de force le mouvement est aussi rectiligne uniforme. Cette formulation permet de définir une force !

Le principe d'inertie sous-entend qu'un point matériel s'oppose naturellement à une modification de son mouvement : il faut agir sur lui pour le perturber, c'est l'inertie. Intuitivement on peut affirmer que plus un corps est massif plus il s'oppose à sa mise en mouvement.

4.2 Référentiel galiléen

Le principe d'inertie repose sur la notion de référentiel galiléen dans lequel un objet ne subissant aucune interaction doit conserver son état initial.

★ Définitions ♡

Système isolé : On appelle système isolé, un système ne subissant aucune force/interaction. On appelle système pseudo-isolé, un système dont les forces/interactions qu'il subit se compensent.

Référentiel galiléen : Un référentiel est dit galiléen si un corps ne subissant aucune interaction conserve son état initial (par abus de langage on dit parfois "si il respecte le principe d'inertie"). Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Remarque importante : Un référentiel est supposé galiléen si sur une échelle de temps donnée (l'expérience typiquement), un système isolé ou pseudo-isolé conserve son état initial. Le référentiel terrestre peut être supposé galiléen lorsque l'on étudie un pendule mais pas pour le pendule de Foucault ou un tir balistique intercontinental.

Exemple : Un mobile sur coussin d'air sur plan parfaitement horizontal est un système pseudo-isolé

4.3 Le principe fondamental de la dynamique (PFD)

On appelle **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m le vecteur :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Comme la vitesse, la quantité de mouvement dépend du référentiel. La masse intervient : même s'il se déplace moins vite, un navire porte-conteneurs a une quantité de mouvement plus élevée qu'une vedette rapide.

La quantité de mouvement est parfois appelée impulsion, et se traduit en anglais par « momentum ».

★ Principe Fondamental de la dynamique ♥

Seconde loi de Newton : Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , les variations de quantité de mouvement d'un point matériel M sont reliées aux forces qu'il subit.

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

avec \vec{F} la résultante des forces extérieures qui s'appliquent au système.

Le PFD est parfois appelé loi de la quantité de mouvement (terme du programme)

Cas particuliers :

— si la masse est constante : $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m \vec{a}_{\mathcal{R}_g}$.

— Si la résultante des forces est nulle, la quantité de mouvement est conservée et on retrouve le principe d'inertie !

Remarque : Cette formulation est plus générale que celle vue en lycée, on peut par exemple traiter des systèmes ouverts qui présentent une masse variable, des problèmes de relativité où la masse dépend de la vitesse...

4.4 Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques

★ Réciprocité des actions ♥

La force exercée par un objet 1 sur un objet 2 a exactement la même valeur et même direction que la force exercée par l'objet 2 sur l'objet 1. Seul le sens change :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Le principe des actions réciproques est un postulat de la mécanique, au même titre que le principe d'inertie et le principe fondamental de la dynamique.

Par exemple, nous attirons autant la Terre que la Terre nous attire. Pareil pour la Lune et la Terre ! C'est la différence de masse entre les deux objets (la Lune et la Terre) qui fait que l'un des objets voit son mouvement modifié par l'action de la gravitation et pas l'autre : la Lune tourne autour de la Terre, la Terre tourne autour du Soleil...

4.5 Les forces qui dépendent du PFD

Il existe un certain nombre de forces dont la norme et la direction dépendent des contraintes subies par le système, c'est le cas par exemple de la tension du fil dans l'exemple du pendule simple (voir DM), de la réaction du support, ou encore des forces de frottement solide.

★ Réaction du support ♥

Un système posé sur un support (sol, table etc ...) ne tombe pas. La force exercée par un support sur un objet est la réaction du support notée \vec{R}_N .

$$\vec{R}_N = \vec{F}_{\text{support/systeme}} \quad (4)$$

Les caractéristiques de \vec{R} sont les suivantes :

- **Origine** : point de contact entre le support et le système
- **Directions** : perpendiculaire au support
- **Sens** : Vers le haut
- **Valeur** : pas de formule, souvent opposée au poids.

Cas des forces de frottement solide Dans le cas d'un mouvement la force de frottement solide, correspond à une réaction tangentielle du support \vec{R}_T . Cette force s'applique au point de contact, de direction tangente à la surface du support, orienté afin de s'opposer à la vitesse et de norme $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ avec f_d le coefficient dynamique de frottement. Dès qu'il y a adhérence (absence de mouvement), la valeur et la norme de cette force change complètement.

Il faut noter qu'un objet statique sur une table ou un plan incliné subit lui aussi une force de **frottement statique**. Au niveau microscopique les interactions entre les deux matières en contact diffèrent donnant lieu à des forces de frottement différentes avec des coefficients de frottement différents. En statique la relation s'écrit :

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$$

Le début de glissement s'interprète par le fait que $\|\vec{R}_T\| = f_s \|\vec{R}_N\|$

Attention : Les relations précédentes portent sur les normes des vecteurs mais pas sur leur direction !

5 Bilan : fiches pratiques



Fiche méthode : Traiter un problème de mécanique

- Définir le système et ses caractéristiques utiles.
- Choisir le référentiel d'étude et préciser si il est supposé galiléen ou non.
- Faire un bilan des actions mécaniques.
- Faire/compléter une figure permet très souvent d'y voir plus clair (pour vous et pour le correcteur).
- Appliquer le PFD (ou autre théorème utile que nous verrons ultérieurement).
- Définir la base dans laquelle travailler puis écrire les vecteurs-position, -vitesse, -accélération dans cette base.
- Appliquer le PFG (ou le théorème choisi) et le projeter sur les vecteurs unitaires de la base : on obtient les équations différentielles du mouvement.
- Résoudre les équations précédentes si cela est possible et/ou demandé.
- Éliminer la dépendance temporelle pour obtenir l'équation de la trajectoire.



Fiche méthode : Méthode d'Euler

La méthode d'Euler consiste à estimer la dérivée $\frac{df}{dt}$ par le taux d'accroissement $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. Puis à exprimer $f(t + \Delta t)$ en fonction de $f(t)$. Ici cela conduit à

$$\begin{cases} \dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) - \frac{\alpha'}{m} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \dot{x}(t) \Delta t \\ \dot{z}(t + \Delta t) = \dot{z}(t) - \left(g + \frac{\alpha'}{m} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \dot{z}(t) \right) \Delta t \end{cases}$$

De même pour la position $\dot{x} \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ et donc,

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t) \Delta t \\ z(t + \Delta t) = z(t) + \dot{z}(t) \Delta t \end{cases}$$

On peut ensuite rentrer ces formules dans un tableur, une calculatrice ou demander à Python de faire le boulot pour obtenir une expression approchée de la trajectoire en représentant $z(x)$.

6 Applications classique

6.1 La chute libre

C'est le cas de la chute d'un objet sous le seul effet de la pesanteur (pas de frottement).

6.2 Le jet de projectiles sans frottement

Trouver la trajectoire et la parabole de sûreté (voir TD)

6.3 Les frottements laminaires

6.4 Les frottements turbulents