Oscillateurs amortis en régime sinusoïdal forcé

Dans la première partie de ce chapitre, les oscillateurs en régime libre étaient soit soumis à une consigne fixe (ex : échelon de tension), soit en relaxation libre par rapport à une perturbation de leur situation d'équilibre. La réponse de l'oscillateur afin d'atteindre la consigne ou la position d'équilibre pouvait donc se faire soit par des oscillations libres à la pulsation libre $\Omega(\omega_0)$ soit par une exponentielle.

Dans cette deuxième partie, nous allons forcer l'oscillateur à osciller à une pulsation autre, *non naturelle*, que nous noterons ω. Nous observerons qu'en fonction de cette pulsation de forçage, l'oscillateur changera de comportement. Pour certaines pulsations dites de résonance, l'amplitude du système pourra devenir supérieur à celle du forçage, et à l'inverse pour d'autres pulsations, le système ne *bougera* pas.

1 Préambule

Nous n'aborderons ici que le cas du forçage sinusoïdal monochromatique.

★ Définition

Un signal sinusoïdal est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) = X_m \cos(\Phi(t))$$

avec X_m l'amplitude du signal, ϕ la phase à l'origine, $\Phi(t)$ la phase du signal et ω sa pulsation.

On note le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{1}$$

Ce déphasage peut être lié à un retard de propagation (jamais le cas en ARQS), ou à des phases additionnelles générées par des composants du système.

Si $\Delta\Phi > 0$ alors le signal 2 est en avance de phase sur le 1, $\Delta\Phi < 0$ alors il est en retard.
On distingue quelques cas particuliers :

- $\Delta\Phi = 0$ les signaux sont dits en phase.
- $\Delta\Phi = (2n+1)\pi$ avec n entier naturel : les signaux sont en opposition de phase.
- $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$ les signaux sont en quadrature de phase.

1.1 Les circuits linéaires

★ Circuit linéaire

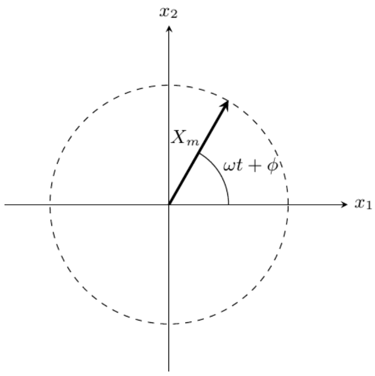
Un circuit linéaire est un circuit qui conserve les fréquences : dans un tel circuit soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω, la tension aux bornes de chaque composant oscille à ω. Les composants agissent uniquement sur l'amplitude du signal X_m et sur la phase $\Phi(t)$.

Propriété : Si on envoie simultanément plusieurs signaux sinusoïdaux sur un circuit linéaire, la réponse du circuit est la somme des réponses du circuit pour chacune des composantes.

Ces circuits linéaires sont régis par des équations différentielles, or la dérivation d'un sinus ou d'un cosinus est plus difficile que celle d'une exponentielle

1.2 Représentation Complexe

Un nombre complexe $\underline{x}$ peut se représenter dans un plan xOy avec x_1 la partie réelle du signal et x_2 sa partie imaginaire. On écrira alors $\underline{x} = x_1 + jx_2$, l'angle formé entre l'axe réel et l'axe imaginaire $\theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$.



Dans le cas d'un signal sinusoïdal, le nombre complexe de la forme $\underline{x} = X_m \exp j(\omega t + \phi)$ est vecteur de norme X_m. Il se représente sur un cercle de rayon égale à la norme du vecteur et d'angle $\theta = \omega t + \phi$.
C'est un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω appelé vecteur de Fresnel associé à $\underline{x}$.

★ Définition

Le principe de la représentation complexe des signaux sinusoïdaux est de faire correspondre un signal réel $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ à un signal complexe de la forme $\underline{x} = X_m \exp j(\omega t + \phi) = \underline{X_m} \exp j(\omega t)$.

Les différentes grandeurs sont reliées par les relations suivantes :

- $\underline{X_m} = X_m \exp(J\phi)$
- $|\underline{X_m}| = X_m$ est l'amplitude du signal
- $arg(\underline{X_m}) = \phi$ la phase à l'origine du signal
- $x(t) = \mathcal{R}\rceil[\underline{x(t)}]$

le symbole habituellement utilisé en mathématique pour représenter un imaginaire pur et la lettre i. En physique, cette lettre est déjà couramment utilisée pour représenter un courant, d'où le choix de la lettre j.

Cette écriture est très pratique lorsqu'il s'agit de travailler avec des équations différentielles : La dérivée d'un telle signal s'écrit $j\omega\underline{x}$ et sa primitive est : $\frac{\underline{x}}{j\omega}$. Rappelons aussi que multiplier un complexe par j revient à lui faire subir une rotation de $+\pi/2$ dans le plan complexe.

Application : Calculer la dérivée et la primitive d'un signal réel en utilisant sa représentation complexe.

★ Argument d'un complexe

Soient z_1 et z_2 les complexes non nuls :

- $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
- pour tout réel a non nul : $\arg(az) \equiv \begin{cases} \arg z & \text{si } a > 0 \\ (\arg z) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ ;} \end{cases}$
- $arg(j) = \pi/2$
- $\arg(a + jb) \equiv \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \text{ ;} \end{cases}$

★ Utilisation de la représentation complexe

Toute équation différentielle à coefficient constant soumise à une excitation sinusoïdale du premier ou du second ordre :

$$\text{1er ordre : } \dot{X} + \frac{1}{\tau}X = C_0 \cos\omega t + \phi_0 \quad \rightarrow j\omega\underline{X} + \frac{\underline{X}}{\tau} = \underline{C_0}$$
$$\text{2nd ordre : } \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 = C_0 \cos\omega t + \phi_0 \quad \rightarrow -\omega^2\underline{X} + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \underline{C_0}$$

à démontrer

On appelle **fonction de transfert**, la fonction complexe $\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{X}}{\underline{C_0}}$ qui représente le rapport du signal complexe issue du système (signal de sortie) sur le signal complexe de consigne aussi appelé signal d'entrée.
Ainsi :

$$\underline{H(\omega)} = \frac{\underline{X}}{\underline{C_0}} = \frac{X_m e^{(j\omega t + j\phi_s)}}{C_0 e^{(j\omega t + j\phi_0)}} = \frac{X_m}{C_0} e^{j\Delta\phi}$$

Ainsi $|H|$ représente le gain du système, c'est à dire le rapport de l'amplitude de sortie sur l'entrée et $arg(\underline{H})$ représente le déphase de la réponse du système par rapport à l'entrée.

2 Utilisation de la représentation complexe en électricité

La méthode qui consiste à passer l'équation différentielle en complexe fonctionne très bien, néanmoins, en électricité, une méthode encore plus rapide est possible. Cette méthode consiste à utiliser directement les complexes pour générer l'équation différentielle.

2.1 Notion d'impédance

★ Impédance complexe d'un dipôle linéaire passif

Pour un dipôle linéaire passif, la tension complexe $\underline{u}$ à ses bornes est reliée à l'intensité complexe $\underline{i}$ qui le traverse par une relation obtenue par généralisation de la loi d'Ohm :

$$\underline{u} = \underline{Zi}$$

ou $\underline{Z}$ est un nombre complexe appelé impédance complexe du dipôle.

Note : *Il s'agit d'une généralisation de la notion de résistance !* L'argument complexe de $\underline{Z}$ correspond au déphasage entre la tension u(t) et l'intensité i(t) car arg($\underline{Z}$) = arg($\underline{u}$) arg($\underline{i}$). Le module de $\underline{Z}$ relie les amplitudes ou les valeurs efficaces entre elles, $U_m = ZI_m$ et $U_{eff} = ZI_{eff}$.

Admittance complexe : L'admittance complexe $\underline{Y}$ d'un dipôle linéaire passif est définie par $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, elle généralise la notion de conductance.

2.2 Impédance des dipôles usuels

Pour trouver les impédances complexes des dipôles usuels, il suffit d'écrire la relation tension courant de ces dipôles, de simplifier l'expression en utilisant les propriétés de la représentation complexe et d'identifier $\underline{Z}$ en comparant l'expression de la loi d'Ohm généralisée.

Application : Trouver l'impédance d'un condensateur.

★ Impédances complexes des dipôles usuels

Résistance	Condensateur	Bobine
$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Z_L} = jL\omega$

Étude qualitative des comportements des bobines et condensateurs : À basse fréquence, le module de l'impédance complexe tend vers l'infini : le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.
À haute fréquence, le module de l'impédance complexe tend vers 0 : le condensateur se comporte comme un fil.

À basse fréquence, le module de l'impédance complexe tend vers 0 : la bobine se comporte comme un fil.
À haute fréquence, le module de l'impédance complexe tend vers l'infini : la bobine se comporte comme un circuit ouvert.

L'utilisation des comportement limite permet souvent d'intuité le comportement d'un système.

2.3 Lois de l'électrocinétique

★ Généralisation des lois

Lois de Kirchhoff : Les lois de Kirchhoff sont toujours valable en régime sinusoıdal mais uniquement pour les grandeurs complexe.
Association d'impédances : Les impédances complexes peuvent s'associent comme le font les résistances "réelles".
Résistance et réactance : L'impédance étant un nombre complexe, elle peut s'écrire sous la forme $\underline{Z} = R + jX$ avec R et X deux réels. La résistance R est un réel positif ou nul. La réactance X est un réel. Si $X > 0$ le dipôle est dit inductif, si $X < 0$ il est dit capacitif.

Application : Reprendre le circuit LC du cours précédent et écrire la loi des mailles en utilisant les complexes.

3 Régime sinusoïdal forcé d'un oscillateur, exemple du RLC série

3.1 Utilisation de l'équation différentielle

On étudie à nouveau le circuit RLC raccordé à un générateur mais cette fois délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ afin de forcer le système à osciller. L'application de la loi des mailles et des relations courant/tension permet d'écrire l'équation différentielle vérifiée par le système.

★ Forçage du circuit

RLC : Le circuit RLC forcé par une tension sinusoïdale respecte l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t) = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

Forçage de l'oscillateur mécanique amorti : L'oscillateur mécanique amorti forcé par une excitation sinusoïdale respecte l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_0 \cos(\omega t)$$

Un tel oscillateur soumis à une excitation extérieur va tout d'abord passer par un régime transitoire assez complexe avant d'atteindre le régime sinusoïdale forcé que nous allons étudier dans la suite.
Afin de faciliter les calculs, nous allons transformer l'équation pour passer chacun des termes dans le domaine complexe.

Méthode

La tension excitatrice : $\underline{e}(t) = E\exp(j\omega t)$.
Condensateur : La tension aux bornes du condensateur s'exprime $\underline{u_C}(t) = \underline{U}_0 \exp(j\omega t)$. Avec $\underline{U}_0$ un nombre complexe possédant une phase et un module.
On introduit ces notations dans l'équation en utilisant les règles de dérivations $\frac{d^2}{dt^2} \to -\omega^2$ et $\frac{d}{dt} \to j\omega$.

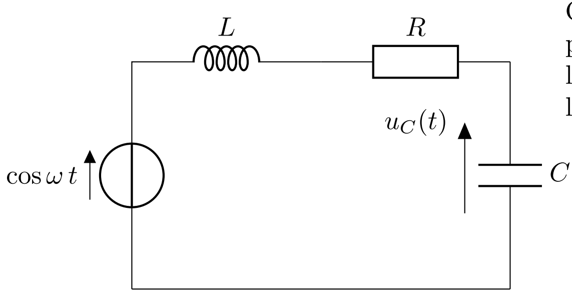
Application :

$$-\omega^2 \underline{U}_0 \exp(j\omega t) + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{U}_0 \exp(j\omega t) + \omega_0^2 \underline{U}_0 \exp(j\omega t) = \omega_0^2 E \exp(j\omega t)$$

$$\underline{U}_0 \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E$$

$$\underline{U}_0 = \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

3.2 Utilisation directe des impédances



On remplace directement tous les composants par leurs impédances et on utilise le module de la tension. Comme il n'y a qu'une seule maille, le pont diviseur de tension s'applique : Ainsi

$$\underline{U}_0 = \frac{Z_c}{Z_R + Z_C + Z_L} E = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} E$$

en multipliant par $jC\omega$, on obtient :

$$\underline{U}_0 = \frac{E}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2} = \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jR\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\sqrt{LC}\omega} = \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

3.3 Résolution

★ Forme canonique des solutions

Amplitude complexe d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{U}_0 = \frac{E}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

En SI on utilise souvent le facteur d'amortissement $\xi = \frac{1}{Q}$, l'équation devient alors $\underline{U}_0 = \frac{E}{1-x^2+j\xi x}$

Module et phase Le module de la tension s'exprime : $|\underline{U}_0| = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2+(\frac{x}{Q})^2}}$

La phase du signal s'exprime $\phi = arg(\underline{U}_0) = -arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q})$. Si $1 - x^2 > 0$ alors $\phi = -\arctan(\frac{x/Q}{1-x^2})$ et $\phi = -\left(\pi - \arctan(\frac{x/Q}{|1-x^2|})\right)$ sinon.

Pour une étude sans problème de divergence il est possible de réexprimer la phase sous la forme : $\phi = -arg(j\left(-j(1-x^2)\right) + \frac{x}{Q}) = \frac{-\pi}{2} + \arctan(\frac{1-x^2}{x/Q})$.

3.4 Le cas de la résonance

★ Définition

Lorsque le système est soumis à une excitation sinusoïdale il peut exister certaines fréquences particulières, appelées fréquences de résonance, pour lesquelles l'amplitude de sa réponse passe par un maximum : on dit qu'il y a résonance. A la résonance, même une faible excitation peut suffire pour produire de très grandes oscillations du systèmes.

Une fonction qui présente une résonance présente donc un ou des maxima. Étudier la résonance dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti revient à étudier le comportement du module de la tension et plus simplement, le comportement de la fonction présente sous la racine définie par $f(x) = (1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2$.
Pour ce faire, nous allons étudier les extrêma de la fonction :

$$\frac{df}{dx} = x(\frac{2}{Q} - 4 + 4x^2) = 0 \implies x_1 = 0 \,\mathrm{et} x_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

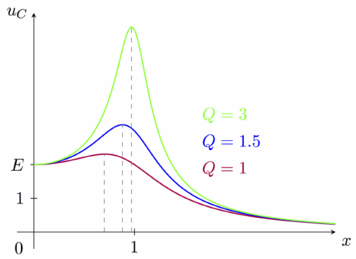
La solution $x = 0$ représente une absence de forçage.
Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la solution x_2 est complexe et n'a pas de sens physique.
Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la solution x_2 est réelle positive. Le dénominateur admet deux extrema, le premier en $x = 0$ et le second en x_2 . Ce second extrêmum est un maximum car la dérivée seconde est positive, ce qui signifie que la tension admet un maximum en x_2.

3.5 Amplitude à la résonance

Dans le cas où $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude à la résonance se trouve en injectant la solution x_2 dans la formule donnant le module de la tension :

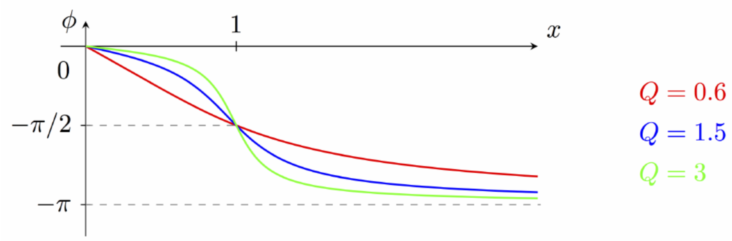
$$\begin{aligned} |\underline{U}_0|_r &= \frac{E}{\sqrt{(1-x_2^2)^2 + (\frac{x_2}{Q})^2}} \\ &= \frac{E}{\sqrt{(\frac{1}{2Q^2})^2 + (\frac{1}{Q^2})(1 - \frac{1}{2Q^2})}} \\ &= \frac{EQ}{\sqrt{(\frac{1}{4Q^2}) + (1 - \frac{1}{2Q^2})}} \\ &= \frac{EQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \end{aligned}$$

Pour obtenir cette résonance il faut exciter le système à la pulsation $\omega_r = x_2\omega_0 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
La valeur du maximum du module des oscillations dépend de la valeur du facteur de qualité.
Pour des grandes valeurs du facteur de qualité $Q \gg 1$ la valeur du maximum du module $|U_m| \approx QE$ est d'autant plus grand que le facteur de qualité est grand.



Comment tracer le module : On utilise les comportements limites ainsi que la valeur du module à la résonance :
Quand x tend vers l'infini, le module tend vers $\frac{E}{x^2}$, quand x tend vers le module tend vers E.

Application : Utiliser le même raisonnement pour justifier la forme de la phase :



3.6 Résonance en intensité (ou vitesse)

Il faut tout d'abord exprimer l'intensité traversant la bobine, on peut le faire en généralisant au cas complexe la relation courant/tension du condensateur :

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 = jC\omega\underline{U}_0 &= jC\frac{E}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = jC\omega_0\frac{\omega}{\omega_0}\frac{E}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} \\ &= jx\frac{E\sqrt{C/L}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{E\sqrt{C/L}}{1/Q+j(x-1/x)} \\ &= \frac{QE\sqrt{C/L}}{1+jQ(x-1/x)} = \frac{E/R}{1+jQ(x-1/x)} \end{aligned}$$

★ Intensité complexe

Amplitude :

$$\underline{I}_0 = \frac{E/R}{1+jQ(x-1/x)}$$

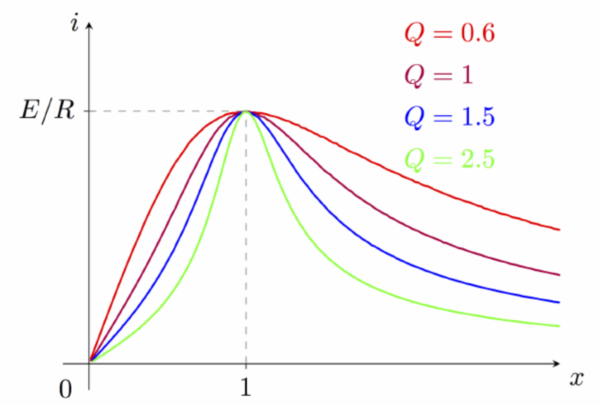
Module et phase : L'expression du module de l'intensité complexe est

$$I_0 = \frac{E/R}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}$$

L'expression de la phase de l'intensité complexe est $\phi = arg(\underline{I}_0) = arg(jC\omega\underline{U}_0) = arg(\underline{U}_0) + \pi/2$.

Cherchons si il existe un maximum pour le module de l'intensité complexe. Cela correspond à un minimum de $f(x) = (x-1/x)^2$. Cette fonction est minimale si $x = 1$ soit pour $\omega = \omega_0$. L'amplitude à la résonance est alors $I_0(\omega_0) = \frac{E}{R} = QE\sqrt{C/L}$.
L'amplitude de la résonance est inversement proportionnelle à R. La résonance en intensité est différente de la résonance en tension !

Si l'on soumet un circuit RLC à une excitation sinusoïdale il existe toujours une résonance en intensité pour la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$. A la résonance, l'amplitude est proportionnelle au facteur de qualité, elle est d'autant plus grande que l'amortissement est faible.



★ Acuité

La largeur du pic de résonance est la bande de pulsation $\Delta\omega$ pour lesquelles $U_0(\omega) \geq \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$.
On appelle acuité de la résonance la grandeur adimmensionnée $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ plus la résonance est étroite (ou aiguë) plus l'acuité de la résonance est grande.
L'acuité de la résonance est égale au facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ Plus Q est grand plus le pic de résonance est étroit.