

Devoir surveillé : Oscillateurs, circuit linéaire et optique

Adapté de CCINP 2021 MP

La calculatrice est interdite

Les images sont omniprésentes dans l'environnement et il peut sembler qu'elles l'ont toujours été. C'est pourtant loin d'être le cas. Longtemps le dessin et la peinture furent les seuls moyens utilisés pour représenter la réalité sur un support à deux dimensions et ce n'est qu'au XIXe siècle qu'un procédé technique permit de "capturer" des images.

1 Optique de l'appareil photo

La date conventionnelle de l'invention de la photographie a été fixée au 7 janvier 1839, date à laquelle Arago présenta à l'Académie des Sciences l'invention de Daguerre : le daguerréotype. Mais l'histoire de la photographie commence bien avant notamment avec la camera obscura (chambre noire) qui est utilisée dès le XVIe siècle pour des travaux topographiques. Les historiens de l'art ont également montré qu'elle était utilisée par des peintres, comme Vermeer ou les frères Van Eyck. Le fonctionnement de cet ancêtre de l'appareil photo repose sur les propriétés des lentilles.

1.1 Objet et image

On modélise un appareil photo (figure 1) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

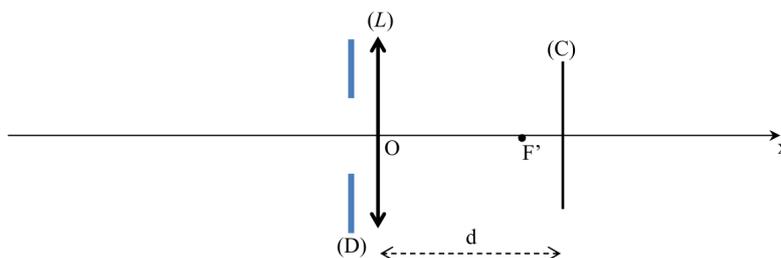


Figure 1: Modélisation d'un appareil photo

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre d_{min} et d_{max} .

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

1. La lentille mince est utilisée dans les " conditions de Gauss ".
 - a) Préciser en quoi elles consistent.
 - b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?
2. Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.
3. Exprimer la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h , f' et L . Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

Note : *Rappel* le grandissement peut s'exprimer des façons suivantes :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

4. Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?

5. Montrer qu'il existe une distance limite notée L_{min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à L_{min} .
6. Exprimer L_{min} en fonction de f' et d_{max} .
7. Calculer L_{min} pour $f' = 50$ mm et $d_{max} = 55$ mm.

1.2 Influence de la focale

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f'_1 = 100$ mm. La distance d est toujours réglable mais les valeurs d_{min} et d_{max} sont différentes des valeurs calculées précédemment.

8. Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?
9. Si on suppose que le capteur a pour dimensions : $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

L'objectif utilisé est appelé *téléobjectif* ou *objectif de longue focale*. Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif *rapproche les objets*.

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L1) convergente et une lentille (L2) divergente, séparées par une distance e . La distance L entre (L1) et l'arbre n'a pas changé.

10. La lentille (L1), de focale f'_1 , donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L2), de focale f'_2 , qui en donne une image finale $A'B'$.
 - a) Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f'_1 et e (en utilisant une approximation justifiée).
 - b) L'image $\overline{A'B'}$ doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e , f'_1 et f'_2 (en utilisant une approximation justifiée).
 - c) Vérifier que cette condition est réalisée avec $f'_1 = 10$ cm, $f'_2 = -5$ cm et $e = 8$ cm.

1.3 Exploitation d'une photo

Les tailles des capteurs dont sont équipés les appareils numériques actuels sont variables, comme l'indique le document 1.

| Document 1 - Exemples de capteurs d'appareils photo numériques | | | |
|----------------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------|
| Standard Diagonale | Dimensions | | Exemples |
| 1/2,5" | 7,18 mm | 4,29x5,76 mm | Panasonic TZ6 |
| 1/2,3" | 7,7 mm | 4,62x6,16 mm | Nikon P90, Canon 110 IS |
| 1/2" | 8 mm | 4,8x6,4 mm | Fuji F70EXR |
| 1/1,7" | 9,5 mm | 5,7x7,6 mm | Canon G10 |
| 1/1,6" | 10 mm | 6x8 mm | Fuji S200EXR |
| 4/3" | 21,6 mm | 13x17,3 mm | reflex 4/3 et hybrides Micro 4/3 |
| | 24,8 mm à 28,4 mm | 13,8x20,7 mm (Sigma) à 15,8x23,6 mm (Nikon, Sony) | reflex amateurs |
| 24x36 | 43,3 mm | 24x36 mm | Nikon D700, Sony Alpha 900 |

Source : Wikipedia

La photo ci-dessous a été prise avec un appareil photo numérique de type "Canon G10". Les informations relatives à la photo sont consignées dans le document 2.



Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel (au point B sur la carte satellite du document 3). La distance BC vaut 1,46 km.

| | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------|
| Document 2 - Informations relatives à la prise de vue (Photo Mont Saint-Michel) | | |
| Sensibilité : 100 ISO Vitesse : 1/250 s Ouverture : f/7,1 Focale : 18 mm | | |
| Document 3 - Image satellite de la baie du Mont Saint-Michel | | |
| | | |
| A : Bec d'Andaine | B : lieu de la prise de vue | C : Mont Saint-Michel |

11. À partir de la photo obtenue et des documents 1, 2 et 3, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

1.4 Comment expliquer les propriétés des lentilles

Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique.

Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (figure 2) constituée d'un verre d'indice n . L'indice de l'air ambiant est égal à 1.

La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = CB$. L'épaisseur

de la lentille au centre est $e = OS$.

On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F' . On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.

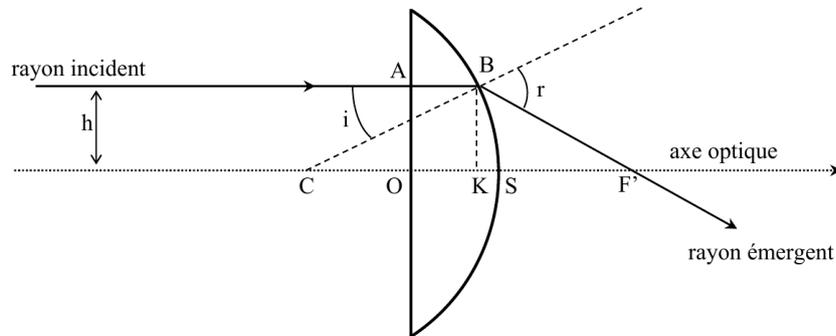


Figure 2: Modélisation d'une lentille plan-convexe

12. a) Écrire la loi de la réfraction en B.
b) Montrer que la distance OF' peut se mettre sous la forme :

$$OF' = e - R[1 - \cos i] + \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$$

13. a) La lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ?
b) Si on considère une lentille mince (e faible devant R) et des rayons paraxiaux, peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier.
c) Dans le cas de la lentille mince, donner une expression approchée de la distance OF' .

2 Principe de fonctionnement d'un flash

En simplifiant de façon importante, un flash se compose d'une pile (f.e.m. de 9 V) qui charge un condensateur dont la capacité vaut $C = 200\mu F$. Quand celui-ci est chargé, une diode s'allume, indiquant que le flash est prêt à être utilisé. Lors du déclenchement de l'obturateur, le condensateur se décharge dans un tube contenant du xénon sous faible pression, ce qui provoque l'émission d'un éclair de courte durée.

14. L'énergie stockée dans le condensateur doit être de l'ordre de 10 J. En déduire la tension U_0 sous laquelle il faut le charger. Commenter cette valeur.
15. Le condensateur, initialement chargé et présentant une tension U_0 à ses bornes, se décharge dans le tube à xénon qu'on modélise par une résistance $R = 1\Omega$.
- a) Faire un schéma du circuit électrique dans lequel s'insèrent le condensateur et le tube lors de la décharge. Établir l'équation différentielle que vérifie la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur au cours de sa décharge.
- b) Établir l'expression de la puissance $p(t)$ instantanée reçue par le tube au cours de sa décharge en fonction du temps.
- c) Tracer l'allure de la courbe $p(t)$.
16. La durée de l'éclair produit par la décharge du condensateur est de l'ordre de $1/200$ s. Quelle fraction de l'énergie totale est reçue par le tube pendant cette durée ?

Correction :

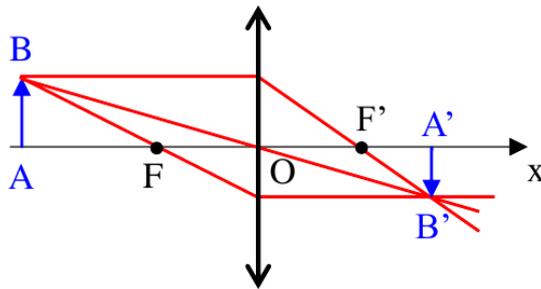
3 Optique de l'appareil photo

3.1 Objet et image

1. La lentille mince est utilisée dans les " conditions de Gauss ".

a) Les rayons incidents sont proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à cet axe. Les propriétés de stigmatisme et d'aplanétisme approchés sont alors vérifiées.

b) Dans l'appareil photo, c'est le diaphragme qui permet d'assurer que les conditions de Gauss sont remplies.



2.

3. D'après la relation fournie :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = h \times \frac{f'}{-L + f'}$$

Comme $L \gg f'$ on peut faire l'approximation $\overline{A'B'} \approx h \times \frac{f'}{-L} = -5 \times \frac{0,050}{20} = -12,5 \text{ mm}$

4. L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image ; on a alors : $d = f' = 50 \text{ mm}$

5. Partant d'un objet lointain (et donc d'une image réelle), plus l'objet se rapproche de l'objectif (L diminue), plus l'image s'en éloigne (d augmente). Comme d est majoré par d_{max} , alors L est minoré par la valeur L_{min} correspondante.

on peut également dans cette question exprimer d en fonction de L et montrer que $d \leq d_{max}$ entraîne $L \geq L_{min}$.

6. Relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow -\overline{OA} = \frac{\overline{OA'} \times f'}{\overline{OA'} - f'}$$

$$\text{Soit } \boxed{L_{min} = \frac{d_{max} \times f'}{d_{max} - f'}}$$

$$7. L_{min} = \frac{55 \times 50}{55 - 50} \text{ soit } \boxed{L_{min} = 550 \text{ mm}}$$

3.2 Influence de la focale

8. On a toujours $L \gg f'$ d'où $\overline{A'B'} \approx -5 \times \frac{0,100}{20} = -25 \text{ mm}$.

9. On voit ainsi que l'image de l'arbre est plus grande que la dimension la plus petite du capteur ; on peut voir l'arbre en entier sur la photo uniquement en mode « portrait ».

10. La lentille (L1), de focale f'_1 , donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L2), de focale f'_2 , qui en donne une image finale $A'B'$.

a) Relation de conjugaison de Descartes pour (L1) :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Leftrightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \times f'_1}{\overline{O_1A} - f'_1}$$

Avec $|\overline{O_1A}| \gg f'_1$ donc on a $\overline{O_1A_1} \approx f'_1$ et d'après la relation de Chasles, on obtient :

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} \approx f'_1 - e$$

Une lentille divergente donne une image réelle (i.e. $\overline{O_2A'} > 0$) si et seulement si l'objet est situé entre le centre optique et le foyer objet. En effet, la relation de conjugaison de Descartes pour (L₂) donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Leftrightarrow \overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \times f'_2}{\overline{O_2A_1} + f'_2} \text{ donc } \overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1} \times f'_2 > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f'_2 > 0 \\ \text{ou } \overline{O_2A_1} \times f'_2 < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f'_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \overline{O_2A'} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{O_2A_1} < 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} + f'_2 > 0 : \text{ impossible (rappel : } f'_2 < 0) \\ \text{ou } \overline{O_2A_1} > 0 \text{ et } \overline{O_2A_1} < -f'_2 : A_1 \text{ entre O et } F_2 \end{cases}$$

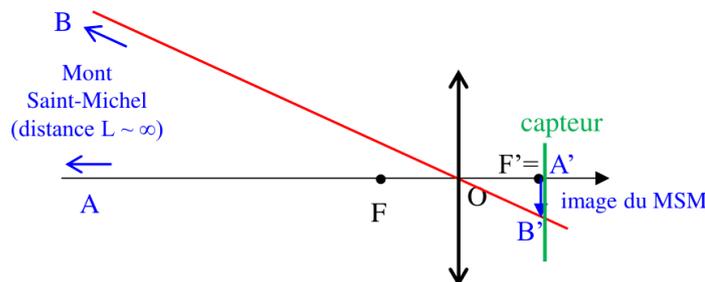
Ainsi pour que A'B' soit réelle, il est nécessaire que A₁ soit situé entre O et F₂, soit : $0 < \overline{O_2A_1} < -f'_2$;

b) on en déduit : $0 < f'_1 - e < -f'_2 \Leftrightarrow \boxed{f'_1 + f'_2 < e < f'_1}$

c) La condition est bien vérifiée : $f'_1 + f'_2 = 5\text{cm} < e = 8\text{cm} < f'_1 = 10\text{cm}$

3.3 Exploitation d'une photo

11. D'après le document 1, le capteur utilisé (Canon G10) a une petite dimension de 5,7 mm ; et on voit que l'image du Mont Saint-Michel occupe environ tiers de cette dimension, plus précisément 3,55 cm sur une image de 10,15 cm de haut (mesuré à la règle) soit 35, 0% . L'image du Mont Saint-Michel sur le capteur a donc une taille de $5,7 \times 0,350 = 2,0\text{mm}$. Le document 2 indique que l'objectif est constitué d'une seule lentille convergente, de focale $f' = 18\text{mm}$. Enfin d'après le document 3 on a $L = 1,46\text{km} \gg f'$.



On en déduit $A'B' = h \frac{f'}{L}$ soit $\boxed{h = L \times \frac{A'B'}{f'} = 1,6 \times 10^2 \text{ m}}$

3.4 Comment expliquer les propriétés des lentilles

12. a) $\boxed{n \sin i = \sin r}$
 b) On a

$$OF' = OS + SF' = OS + CF' - CS = OS + CK + KF' - CS$$

or $OS = e$; $CS = R$; $CK = R \cos i$ et $KF' = \frac{BK}{\tan BFK}$. Comme $\widehat{BFK} = r - i$ et $BK = R \sin i$, on retrouve bien l'expression : $e - R [1 - \cos i] + \frac{R \sin i}{\tan (r-i)}$

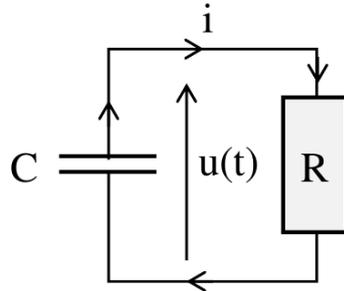
13. a) On voit que les rayons lumineux venant d'un point à l'infini sur l'axe optique et dont l'image est censée être le foyer image, croisent l'axe optique après la lentille en un point qui dépend de l'angle i , donc de la distance h à l'axe optique du rayon incident. La lentille n'est donc pas un système rigoureusement stigmatique.

b) Si on se limite aux rayons paraxiaux (ce qui correspond à $i \ll 1$ et donc $r \ll 1$), on a $\sin i \approx i$; $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ et $\tan r - i \approx r - i \approx (n - 1)i$. Ainsi $OF' \approx e - R \frac{i^2}{2} + \frac{Ri}{(n-1)i} \approx e + \frac{R}{n-1}$

c) Ainsi si $e \ll R$ alors $\boxed{OF'} \approx \frac{R}{n-1}$

4 Principe de fonctionnement d'un flash

14. L'énergie stockée dans le condensateur sous une tension U_0 s'écrit $E_c = \frac{1}{2}CU_0^2$ donc $U_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{C}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{200 \times 10^{-6}}} = \sqrt{10^5} = 10^{2,5}V$. Cette tension est bien supérieure à la f.e.m. de la pile, ce qui suppose un dispositif permettant de transformer la f.e.m. de 9 V en U_0 .



15. a) En convention générateur $i = -C \frac{du}{dt}$, on utilise la loi des mailles associée :

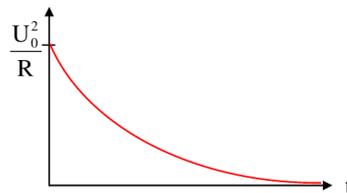
$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

Soit $u(t) = U_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = RC$.

- b) La puissance instantanée reçue par le tube s'écrit :

$$p(t) = u(t) \times i(t) \text{ soit } p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{U_0^2}{R} \exp(-\frac{2t}{\tau})$$

- c)



16. L'énergie reçue pendant une durée Δt s'écrit : $E = \int_0^{\Delta t} p(t) dt$
 Or ici : $\tau = RC = 2 \times 10^{-4} s$ et $\Delta t = \frac{1}{200} = 5 \times 10^{-3} s$. Comme $\exp(-\frac{2\Delta t}{\tau}) = \exp -50 \approx 0$ sans calcul supplémentaire que toute l'énergie stockée a été restituée.

5 Ondes : mesure de la vitesse du son avec les trous de Young (18 points)

Durée estimée : 50 min

On considère un dispositif composé de deux trous de Young percés dans un écran opaque et séparés d'une distance $a = 10,0 \text{ cm}$. Une onde ultrasonore de fréquence $f = 40 \text{ kHz}$ est envoyée dans la direction des trous. L'amplitude de l'onde en sortie est mesurée en utilisant un récepteur qui peut être translaté suivant un axe O_x parallèle à la direction des trous et situé à une distance $D = 50,0 \text{ cm}$ du plan des trous.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 5. Par la suite les valeurs de D et a sont supposées connues avec une précision de 1mm et une incertitude-type sur f négligeable.

1. On considère que la source émet une onde plane progressive monochromatique harmonique, d'amplitude $2S_0$.
 - a) Donner l'expression de cette onde s qui se déplace suivant l'axe Oy , en fonction de la position sur cet axe, du temps t , de sa célérité c et de sa fréquence f . (On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de trous d'Young)(1).
 - b) Réorganisez l'expression de l'onde pour faire apparaître le vecteur d'onde k dont on précisera l'expression. (0.5)

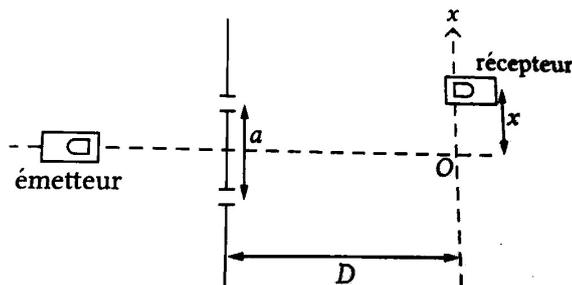


Figure 3: Schéma du dispositif.

2. On ajoute maintenant le dispositif des trous d'Young, tel qu'il est présenté sur la figure 5. Chacun des trous se comporte comme une source secondaire, c'est à dire que les trous jouent le rôle d'émetteur, tout se passe comme s'ils généraient une onde d'amplitude moitié comparée à l'onde mère. On notera E_1 la source située en haut et E_2 . On nomme R le point correspondant au récepteur.

a) Donner les coordonnées des émetteurs et du récepteur R puis en déduire les distances $d_1 = E_1R$ et $d_2 = E_2R$ (2).

b) En supposant que la condition $D \gg a, x$ est vérifiée et en utilisant le développement limité $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$ si $\epsilon \ll 1$, montrer que la différence de marche s'écrit $\delta = \frac{ax}{D}$. (2)

c) Donner l'expression mathématique du signal reçu par le récepteur en fonction de x et calculer l'interfrange i correspondant à la distance entre deux interférences constructives en fonction de λ . (3)

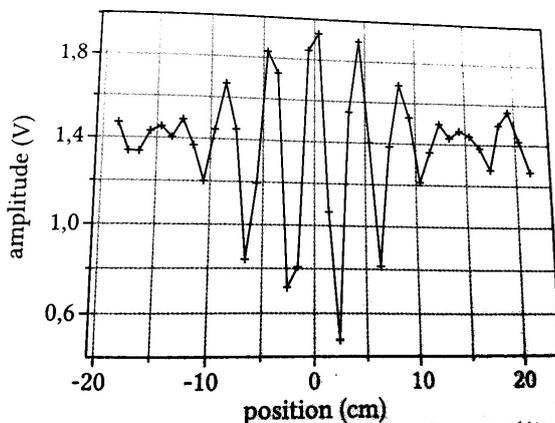


Figure 4: Amplitude mesurée par le récepteur en fonction de x .

3. À partir de la figure 4, estimer la valeur de l'interfrange ainsi que son incertitude-type que vous justifierez. (2) Aide : $17,1/4 = 4,3$

4. En déduire la célérité du son dans l'air. Vous détaillerez avec précision les expressions menant à la détermination de l'incertitude-type sur c . (3)

5. On ajoute un morceau de métal de longueur $\ell \ll D$ sur le trajet de l'onde issue de E_1 , la célérité de l'onde dans le milieu est alors notée c_m .

a) À l'aide de vos connaissances comparer c et c_m . (0.5)

b) Calculer les temps de parcours des ondes issue de E_1 et E_2 en fonction de d_1, d_2, ℓ et des célérités. (1)

c) En déduire la nouvelle expression du signal reçu par le récepteur en fonction uniquement de δ, ℓ, c, c_m et ω . (3)

Correction : Correction :

1. a) $s(y, t) = 2S_0 \cos(2\pi f(t - \frac{y}{c}))$
 b) $s(y, t) = 2S_0 \cos(\omega t - ky)$ avec $k = \frac{2\pi f}{c}$
2. a) $R : (x, 0, 0)$, $E_1 : (a/2, -D, 0)$, $E_2 : (-a/2, -D, 0)$ soit pour les distances : $d_1 = \sqrt{(x + a/2)^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x+a/2)^2}{D^2}}$ et $d_2 = \sqrt{(x - a/2)^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x-a/2)^2}{D^2}}$.
 b) $d_1 \approx D(1 + \frac{(x+a/2)^2}{2D^2})$ et $d_2 \approx D(1 + \frac{(x-a/2)^2}{2D^2})$ ainsi $\delta = d_1 - d_2 = \frac{ax}{D}$
 c)

$$s_1(d_1, t) = s_0 \cos(\omega t - kd_1)$$

$$s_2(d_2, t) = s_0 \cos(\omega t - kd_2)$$

$$s_t(x, t) = 2s_0 \cos(\omega t - k\frac{d_1 + d_2}{2}) \cos(k\frac{\delta}{2})$$

Le premier cosinus oscille alors que le second s'annule pour certaine valeur de δ . On cherche les positions d'interférences constructives :

$$\cos(k\frac{\delta}{2}) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow k\frac{\delta_n}{2} = n\pi \text{ avec } n \in \mathcal{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{kax_n}{2D} = n\pi$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{n\pi 2D}{ka} = \frac{nD\lambda}{a}$$

Soit $i = \frac{\lambda D}{a}$

3. En mesurant avec une règle graduée au millimètre on trouve $4i = (17, 1 \pm 0, 8)$ cm. La précision est limitée par l'écart entre deux positions de mesure du détecteur. Avec l'échelle et le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ on trouve $i = (4, 3 \pm 0, 2)$ cm
4. En utilisant l'expression de i , il vient $\lambda = \frac{ia}{D} = (8, 6 \pm 0, 4)$ cm avec :

$$\frac{u(\lambda)}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(i)}{i}\right)^2}$$

avec $u(D) = u(a) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ mm. Finalement $c = \lambda f = 3, 4 \times 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ avec $u(c) = u(\lambda)$

5. a) $c_m > c$
 b) $t_1 = \frac{(d_1 - \ell)}{c} + \frac{\ell}{c_m}$ et $t_2 = \frac{d_2}{c}$ donc $\Delta t = \frac{\delta}{c} + \ell(\frac{1}{c_m} - \frac{1}{c})$
 c)

$$s_1(d_1, t) = s_0 \cos(\omega(t - t_1))$$

$$s_2(d_2, t) = s_0 \cos(\omega(t - t_2))$$

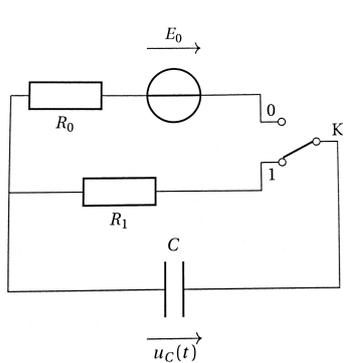
$$s_t(x, t) = 2s_0 \cos(\omega(t - \frac{t_1 + t_2}{2})) \cos(\omega\Delta t/2)$$

6 Charge et décharge d'un condensateur (22 points)

Durée estimée 60 min

Initialement, le condensateur est déchargé et l'interrupteur est en position 1. À la date $t = 0$ on passe

l'interrupteur en position 0 .



1. Que vaut $u_c(t)$ pour $t < 0$ et pour $t = 0^+$?(0.5)
 2. Sans calcul, indiquez la valeur de u_c pour $t \rightarrow +\infty$.(0.5)
 3. Reproduire le schéma en indiquant le sens des tensions et des courants. Ne dessiner que la maille utile.(0.5)
 4. Donner l'équation différentielle qui régit la dynamique de u_c .(1)
 5. En utilisant cette équation, montrer que R_0C est homogène à un temps.(1)
 6. Résoudre cette équation différentielle.(2)
 7. Représenter graphiquement la solution. On indiquera sur le graphe le temps τ . Que représente-t'il ?(1)
 6. Donner la tension aux bornes de R_0 en fonction du temps pour $t > 0$. Tracer cette tension sur le graphe précédent.(2)
 7. Déterminer le temps t_1 tel que $u_C(t_1) = u_{R_0}(t_1)$. Indiquer ce temps sur le graphique.(2)
 8. Réaliser un bilan énergétique entre $t = 0$ et t_1 .(3)
À t_1 on bascule l'interrupteur en position 1.
 9. Indiquez qualitativement (sans calcul) l'évolution de u_C pour $t > t_1$ (0.5).
 10. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par le circuit (1).
 11. Montrez que la solution de cette équation s'écrit (2) :
- $$u_C(t) = \frac{E_0}{2} \exp\left(-\frac{t - t_1}{\tau_1}\right)$$
12. En déduire la forme du courant qui traverse le condensateur (1).
 13. Tracer u_C et $i(t)$ à partir de $t = 0$ (2).
 14. Réaliser un bilan énergétique sur la seconde phase (2).

Correction :

1. $u_c(t < 0) = 0$ car le condensateur est déchargé
2. $u_c(+\infty) = E$ car lorsque le régime permanent est en place, la tension est constante donc l'intensité dans le circuit est nulle. Ainsi la tension aux bornes de la résistance est nulle et la loi des mailles donne : $u_c(+\infty) = E$.
3. Il faut dessiner le schéma avec le générateur et R_0 sans R_1 .
- 4.

$$E = u_C + R_0 i$$

$$E = u_C + R_0 C \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_0 C} u_C = \frac{E}{R_0 C}$$

avec la constante de temps $\tau = RC$.

5. $\frac{du_C}{dt}$ est homogène à une tension divisée par un temps. Par conséquent $\frac{1}{R_0 C} u_C$ a la même dimension ! Et ainsi τ est homogène à un temps.

6.

$$u_C(t) = u_{ch}(t) + \underbrace{u_{Cp}}_E$$

$$u_C(t) = u_C(t) = E + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$. Alors $u_C(0) = 0 = E + A$ et donc $A = -E$.

7. Voir cours

8. D'après la loi des mailles $u_{R_0} = E - u_C = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

9.

$$E \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right]$$

$$2 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 1$$

$$\frac{t_1}{\tau} = \ln 2$$

$$t_1 = \tau \ln 2$$

10.

$$\text{Bilan de puissance : } E i = R_0 i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

$$\text{Générateur } \int_0^{t_1} E i = \int_0^{t_1} C E \frac{du_C}{dt} dt = C E \int_{u_C(0)}^{u_C(t_1)} du_C = \frac{C E^2}{2}$$

$$\text{Résistance } \int_0^{t_1} R i^2 = \int_0^{t_1} R \frac{E^2}{R^2} \exp(-2t/\tau) dt = \frac{E^2 \tau}{2R} \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{8} C E^2$$

$$\text{Condensateur } \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) dt = \frac{1}{8} C E^2$$

À t_1 on bascule l'interrupteur en position 1.

11. u_C décroît car le condensateur se décharge.

12.

$$0 = u_C + R_1 i$$

$$0 = u_C + R_1 C \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_1 C} u_C = 0$$

13. Montrez que la solution de cette équation s'écrit (2) :

$$u_C(t) = B \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$

$$\text{À } t=t_1 \quad u_C(t_1) = \frac{E}{2} = B \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_1}\right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{E}{2} \exp\left(+\frac{t_1}{\tau_1}\right)$$

$$u_C(t) = \frac{E_0}{2} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_1}\right)$$

14. La loi des mailles donne $u_R = -u_C = \frac{E_0}{2} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_1}\right)$ donc

$$i = -\frac{E_0}{2R} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_1}\right)$$

15. Voir cours

16.

$$\text{Bilan de puissance : } 0 = R_1 i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

$$\text{Résistance } \int_{t_1}^{\infty} R i^2 = \int_{t_1}^{\infty} \frac{E^2}{4R} \exp\left(-2\frac{t-t_1}{\tau_1}\right) dt = \left[\frac{-\tau E^2}{8R} \exp\left(-2\frac{t-t_1}{\tau_1}\right) \right]_{t_1}^{\infty} = \frac{1}{8} C E^2$$

$$\text{Condensateur } \int_{t_1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) dt = -\frac{1}{8} C E^2$$