# Devoir surveillé : Oscillateurs

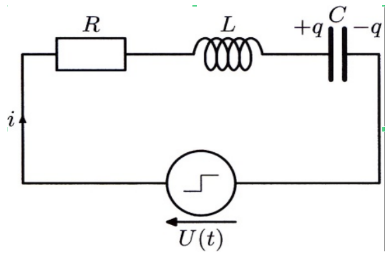
*Ce DS comporte 3 parties indépendantes. Lisez bien l'énoncé et respectez ses notations. Le soin global de la copie est noté sur 1 points. Le Total des points est de 65, beaucoup de points sont prévus pour les justifications.*

## 1 Régime transitoire d'un circuit RLC série (11 points)

*durée estimée : 40min*

Le circuit ci-contre est composé d'une résistance $R$ , d'une bobine d'inductance $L$ et d'un condensateur de capacité $C$ , disposés en série. Un régime permanent est établi. On soumet alors le circuit à un échelon de tension :

$$U(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$
$$U(t) = E \text{ pour } t \geq 0$$




Les choix du sens du courant $i$ dans le circuit et de la plaque portant la charge $q$ du condensateur sont donnés sur la figure ci-dessus.

On pose :

$$\gamma = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1. Montrer qu'à $t = 0^-$ le courant $i$ et la charge $q$ sont nuls.(2)
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$ , en fonction de $R$, $L$, $C$ et $E$, puis en utilisant les constantes $\gamma$ (facteur d'amortissement), $\omega_0$ , $C$ et $E$.(2)
3. Exprimer le facteur de qualité $Q$ en fonction de $\gamma$ et $\omega_0$.(1)
4. Préciser, en les justifiant soigneusement, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.(1)

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs $R$, $L$ et $C$ . On suppose, dans la suite, la condition $\gamma < \omega_0$ est réalisée.

5. Quelle est la nature du régime obtenu dans ce cas ? (1)
6. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = D - CE\left[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right]e^{-\gamma t}$$

où l'on déterminera $\omega$ et $D$ en fonction de $C$ , $E$ , $\omega_0$ et $\gamma$ .(4)

**Correction :**

1. A $t = 0$ le régime permanent est établi. Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert : $i(t = 0^-) = 0$. La bobine se comporte comme un fil donc $U_L(t = 0^-) = 0$. $U_R = Ri = 0$ donc la loi des mailles à $t = 0^-$ donne $U_c = 0$ et $q = 0$.
2. La loi des mailles donne :

$$U_L + U_R + U_c = U$$

relations courant-tension : $U_R = R\frac{dq}{dt}$ $\qquad U_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{2\gamma}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = CE\omega_0^2$$

avec $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3. $Q = \omega_0/2g$
4. Continuité de la charge d'un condensateur : $q(0^+) = q(0^-) = 0$ et continuité de l'intensité qui traverse une bobine : $i(0) = 0$
5. $\omega_0 > g$ donc $Q > 0.5$ le régime est pseudopériodique.
6. On calcule d'abord le discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1-4Q^2) = 4(\gamma^2-\omega_0^2)$ $q(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\Big[A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right.$
   $q_p$ On identifie $qp = CE = D$ et $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}$

## 2 Stabilisation d'un appareil photo (25 points)

*durée estimée : 40min*
*Extrait de MP CCINP 2021*

*Un des problèmes récurrents et que connaissent tous les photographes, professionnels ou amateurs, est le " bougé " qui se produit lorsqu'une photographie est prise alors que le photographe est en mouvement. Le résultat est une image floue. Une des possibilités pour éviter ce phénomène consiste à augmenter la vitesse (diminuer la durée d'exposition) ce qui n'est pas toujours possible.*
*Le premier système stabilisateur d'image a été inventé par Garett Brown en 1972 et ne s'appliquait qu'aux caméras. Il était donc destiné aux professionnels du cinéma. À partir des années 2000, différents systèmes furent adaptés aux appareils photos.*
Cette partie s'intéresse au fonctionnement d'un appareil capable de mesurer les mouvements que le photographe communique (volontairement ou non) au boîtier de l'appareil photo lors d'une prise de vue.

On considère un oscillateur mécanique (figure 1) constitué d'un ressort de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$ dont l'extrémité supérieure est fixée sur la face supérieure horizontale d'une boîte. À l'extrémité inférieure du ressort est accrochée une plaque de masse $m$.

Ce système peut constituer un accéléromètre. Il pourra donc mesurer les accélérations de la boîte (qui modélise un appareil photo par exemple). On négligera d'éventuels mouvements autres que celui de translation verticale. On supposera le référentiel terrestre galiléen et on note $g$ la norme de l'accélération de la pesanteur.

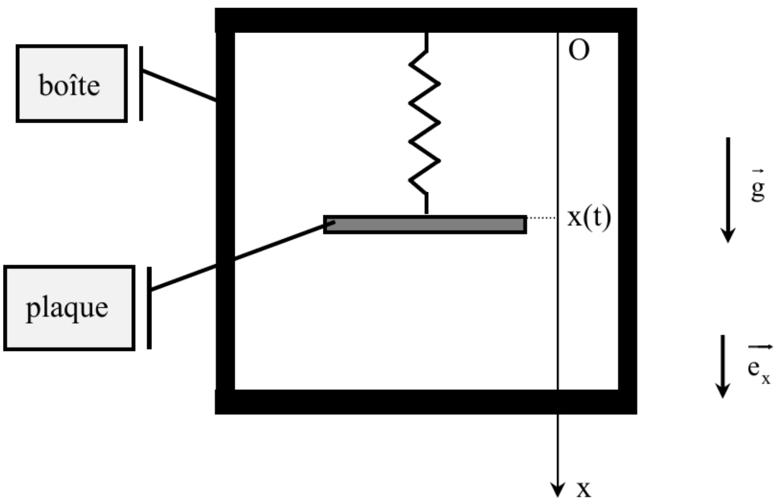



Figure 1: Schéma simplifié d'un accéléromètre

7. En supposant que la boîte et la plaque sont immobiles, exprimer la longueur $x_{eq}$ du ressort à la position d'équilibre dans ces conditions, en fonction de $m$, $g$, $k$ et $\ell_0$ .(2)

Par la suite, on étudie le mouvement de la plaque par rapport à la boîte dans le cas où celle-ci est elle-même en mouvement par rapport au référentiel terrestre. On note $\vec{a} = a(t)\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de la boîte par rapport au sol (lié au référentiel terrestre).
On note alors $x(t)$ la position instantanée de la plaque comptée par rapport à $O$, dans le référentiel lié à la boîte.
Au cours de son mouvement dans la boîte, la plaque est soumise également à des frottements visqueux, modélisables par une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ , où $\overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}$ est la vitesse de la plaque par rapport à la boîte et $\alpha$ un coefficient strictement positif.

8. a) La boîte constitue-t-elle un référentiel galiléen ?
   (1) Dans un référentiel non-galiléen, le principe fondamental de la dynamique ou seconde loi de Newton s'applique avec une légère modification : il faut ajouter au bilan des forces, une force fictive : $\overrightarrow{F}_i = -m\vec{a}_i$ où $\vec{a}_i$ est l'accélération du référentiel non galiléen par rapport à un référentiel galiléen.

   b) Écrire la deuxième loi de Newton appliquée à la masse dans le référentiel de la boîte. (1)

9. Montrer que $x(t)$ obéit à une équation différentielle du type : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$ où $f(t)$ est une fonction du temps avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$ et $f(t)$ à exprimer. (3)

On considère que la boîte est soumise à une accélération sinusoïdale $a(t) = A_m \cos(\omega t)$. On admet avoir atteint le régime sinusoïdal forcé et que le déplacement par rapport à la position d'équilibre est de la forme : $X(t) = x(t) - x_{eq} = Re\left[X_m \exp\left(j(\omega t + \phi)\right)\right]$ avec $j^2 = -1$ et $X_m$ est un réel positif ou nul.

10. Montrer que $X_m = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\frac{\omega_0\omega}{Q})^2}}$. (2)

11. Montrer qu'il existe un résonance pour certaines conditions que vous préciserer. Commentez ce résultat. (4)

12. Donner l'expression de la phase $\phi$.(2)

13. Donner l'expression de $X(t)$. (2)

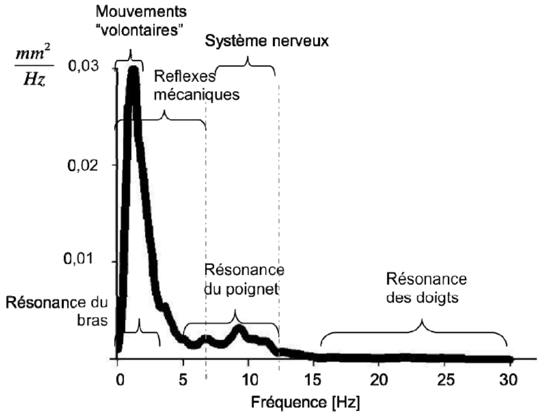
14. Tracer le diagramme de bode asymptotique du système en décibel. (4)

15. Montrer qu'il existe un domaine de fréquences pour lesquelles la réponse X(t) est proportionnelle à l'accélération $a(t)$.(2)

16. Établir la relation entre $X(t)$ et $a(t)$ en fonction de $k$ et $m$ dans ce domaine de fréquences.(1)

17. Le document 8 est une synthèse de l'analyse spectrale du tremblement de la main (pour un être humain) ainsi que de ses origines. Il représente la répartition fréquentielle de l'amplitude des mouvements. L'unité de l'axe des ordonnées n'a pas d'importance pour la compréhension du graphique.
    Pour un accéléromètre fonctionnant selon le principe décrit dans cette sous-partie V.1, on suppose que $Q = 5$ et $\omega_0 = 5 \times 10^3 rad/s$ . À l'aide de ces valeurs et du document, indiquer si la condition évoquée à la question précédente est remplie pour cet accéléromètre.(1)

**Document 8 - Analyse spectrale du tremblement humain**




Source : *Contribution à des architectures de stabilisation d'images basées sur la perception visuelle et la physiologie du tremblement humain,* Fabien Gavant (2012, Thèse de doctorat, Université de Grenoble)

**Correction :**

# Partie V - Le stabilisateur d'image

## V.1 - Étude d'un oscillateur mécanique

**Q22.** Système = {plaque} ; référentiel : terrestre galiléen ; Bilan des forces s'exerçant sur le système :
– poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{e_x}$ ;
– force de rappel $\vec{F} = -k(x-\ell_0)\overrightarrow{e_x}$.

A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$ soit après projection sur Ox : $mg - k(x_{eq}-\ell_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$

**Q23a.** La boîte subissant une accélération, <u>elle constitue un référentiel non galiléen</u>.

**Q23b.** Aux deux forces déjà citées, il faut ajouter :
– la force de frottements visqueux : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x}$ ;
– la force d'inertie d'entrainement : $\overrightarrow{F_{ie}} = -ma(t)\overrightarrow{e_x}$.
NB :il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis puisque le référentiel de la boîte est en translation.
Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen de la boîte donne :

$$\boxed{\vec{P}+\vec{F}+\vec{f}+\overrightarrow{F_{ie}} = m\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_x}}$$

**Q24.** Après projection sur Ox on a : $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x-\ell_0) - \alpha\frac{dx}{dt} - ma(t)$

$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{eq} - a(t)$ de la forme : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$ et $\boxed{f(t) = \omega_0^2 x_{eq} - a(t)}$

**Q25a.** Question plus difficile.
Il y a une coquille d'énoncé dans l'expression de $X_m$, le premier $\omega_0$ est au carré. Cela se voit pour des raisons dimensionnelles ; on peut retrouver également l'expression de $X_m$ (on a de toute façon besoin de l'expression de $\phi$ pour montrer que $\phi \to 0$ ou $\phi \to \pm\pi$).

On pose : $X(t) = x(t) - x_{eq} \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ; alors : $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = -A_m\cos(\omega t)$

Passage en complexe : $-\omega^2\underline{X} + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = -A_m e^{j\omega t} \Leftrightarrow \underline{X}(t) = \frac{A_m}{\omega^2 - \omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}}e^{j\omega t} = \underline{X}e^{j\omega t}$

On a bien : $X_m = |\underline{X}| = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$ et aussi : $\phi = \arg(\underline{X}) = -\arg\left(\omega^2 - \omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$

Alors si $\boxed{\omega \ll \omega_0}$ et $\boxed{\frac{\omega}{Q} \ll \omega_0}$, on a : $X_m \sim \frac{A_m}{\omega_0^2}$ et $\phi \sim -\arg\left(-\omega_0^2 - j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) + \pi \sim \pi$

Ainsi, $\underline{X}(t) \sim \frac{A_m}{\omega_0^2}e^{j(\omega t+\pi)} = -\frac{A_m}{\omega_0^2}e^{j\omega t}$ et $X(t) \sim -\frac{A_m}{\omega_0^2}\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{X(t) \sim -\frac{a(t)}{\omega_0^2}}$

**Q25b.** On a donc dans ce domaine de fréquences : $\boxed{X(t) \sim -\frac{m}{k}a(t)}$

# 3 Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS (11 points)

*Durée estimée 30 min*

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe. Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25,0\,\text{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station.

On note $L_0$ la longueur naturelle du ressort et $k$ sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe $(Ox)$ dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.

1. Tracer un schéma complet de la situation à un instant quelconque, en indiquant en particulier la position $x(t)$ de la chaise, l'origine $x = 0$ et là où les forces s'appliquent sur le système.(0.5)
2. Donner l'expression de la longueur du ressort $\ell(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $L_0$. (1)
3. On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur $k$ du ressort. Pour cela, la chaise vide est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1,28\,\text{s}$ de ses oscillations.

   a) En s'appuyant sur un bilan des forces, établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise. (1)

   b) Écrire cette équation sous forme canonique. Exprimer alors la pulsation propre des oscillations de la chaise. (1)

   c) En déduire que la constante de raideur $k$ s'exprime en fonction de la période $T_0$ et de la masse $m_0$ par $k = \frac{4\pi^2 m_0}{T_0^2}$. (1)

   d) Donner la valeur numérique de $k$ . (0.5)

   e) Donner l'expression de la position de l'astronaute en fonction du temps, en considérant qu'à $t = 0$ il est écarté de sa position d'équilibre d'une distance $D$ avec une vitesse $V$. (3)

   f) Tracer cette solution (1.5).
4. On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse $m_{ast}$. Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{ast} = 2,34\,\text{s}$.

   a) Donner sans calcul l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis. (1)

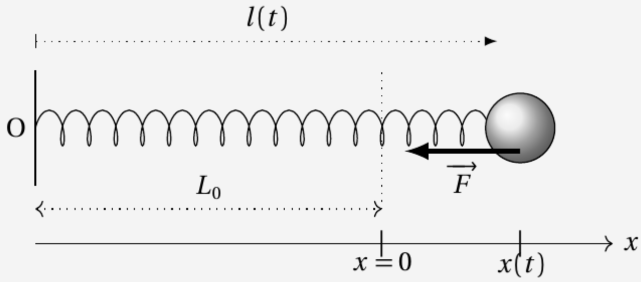
   b) En déduire la nouvelle pulsation propre $\omega_{ast}$ et la nouvelle période $T_{ast}$ des oscillations de la chaise en fonction de $k$ , $m_0$ et $m_{ast}$. (1)

   c) En déduire que la masse de l'astronaute vaut $m_{ast} = m_0 \left[ (\frac{T_{ast}}{T_0})^2 - 1 \right]$. (1)

   d) Évaluer la masse de l'astronaute. (0.5)

**Correction :**

**1.** On a la situation ci-contre.




**2.** La longueur s'écrit $l(t) = L_0 + x(t)$.

**3.** (a) $\overrightarrow{F} = -k\,x(t)\overrightarrow{e_x}$ d'où le PFD $m_0\ddot{x}(t) = -k\,x(t)\overrightarrow{e_x}$ d'où :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m_0}x(t) = 0.$$

(b) $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_0}}$.

(c) $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ d'où la formule.

(d) $k = 602\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

**4.** (a) On obtient :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}}x(t) = 0.$$

(b) On a $\omega_{\text{ast}} = \sqrt{\dfrac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}}}$ et donc $T_{\text{ast}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_0 + m_{\text{ast}}}{k}}$.

(c) On fait le rapport des deux périodes :

$$\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{m_0}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m_0+m_{\text{ast}}}{k}}} = \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_{\text{ast}}}},$$

d'où le résultat.

(d) On trouve $m_{\text{ast}} = 58{,}3\,\mathrm{kg}$.