

## Devoir surveillé : Mécanique

Ce DS comporte 3 problèmes complètement indépendants. À l'intérieur de chaque problème les sous-parties sont très souvent indépendantes. Le plus grand soin est attendu quant aux justifications des réponses.

### 1 Orages en montagne (12 points)

*D'après Concours ATS 2022*

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

#### 1.1 Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse  $m$ , qui chute dans le champ de pesanteur  $g$ . On note  $z$  un axe descendant vers le sol.  $z = 0$  marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note  $\vec{u}_z$  un vecteur unitaire orienté vers le bas. On néglige ici tout frottement.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en  $z = 0$ ). (1,5)
2. Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de  $z$ . (1,5)
3. Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ? (1,5)

#### 1.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z$  la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{u}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient  $\alpha$  est donné par  $\alpha = \rho_{air} \pi R^2 C$ , avec  $\rho_{air}$  la masse volumique de l'air,  $R$  le rayon du grêlon et  $C \simeq 0,5$ .

4. Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse  $v(t)$  du grêlon. (1)
5. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note  $v_{lim}$  cette constante. On donnera son expression en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $g$ . (1,5)

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse  $v_{lim}$ , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Python retranscrit ci-dessous :

```
g = 9.8
alpha = 1.5*10**(-3)
m = 0.24
dt = 0.02 #pas integration en secondes
fin = 15 #duree de la simulation en secondes
nb_iterations = int(fin/dt)

# creation des tableaux contenant
```

```

# le temps, la position et la vitesse
# taille du tableau : nb_iterations

z = np.zeros(nb_iterations)
t = np.zeros(nb_iterations)
v = np.zeros(nb_iterations)

####Initialisation

z[0] = [0] # position initiale
v[0] = [0] # vitesse initiale

for i range(nb_iterations):
    t[i+1] = t[i] + dt
    z[i+1] = # completer
    v[i+1] = # completer

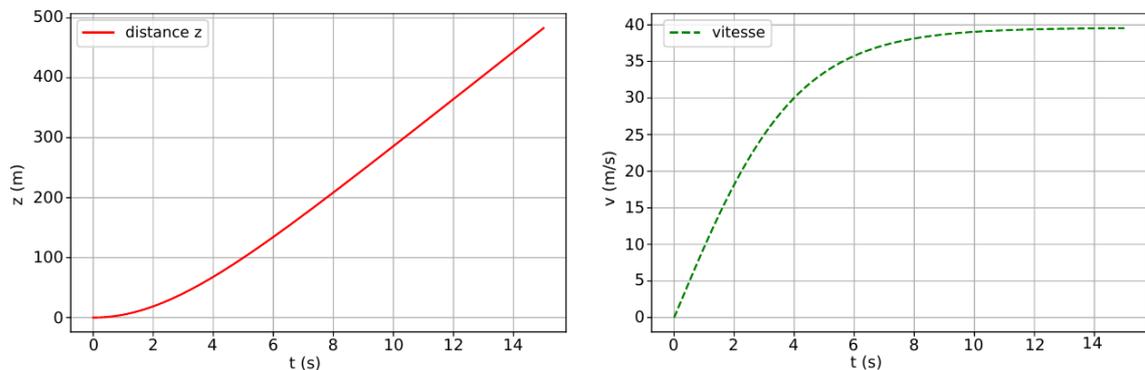
```

Les valeurs de  $m$  et  $\alpha$  sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

6. Compléter le code précédent.(3)

7. Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position  $z(t)$  et de la vitesse  $v(t)$  obtenus par l'algorithme.

La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ? Déterminer la distance  $z$  au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite. (2)



Document 9 : position  $z(t)$  et vitesse  $v(t)$  au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

## 2 Lois de Coulomb relatives au glissement (CCINP2020) 25 points

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant  $f_s$  et  $f_g$  les coefficients statiques et dynamiques du frottement et  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante  $T$  est inférieure à la quantité  $f_s N$  dans laquelle  $N$  représente la norme de la composante normale  $\vec{N}$  telle que  $T \leq f_s N$ .
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité  $T = f_g N$  avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement :  $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$  et  $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$ .

## 2.1 Mesure du coefficient de frottement dynamique (22 points)

On utilise le dispositif représenté sur la figure 1. Un solide 1 de masse  $M$  est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse  $\alpha M$  ( $\alpha > 1 > f_s$ ). Le fil sans masse de longueur  $L$  passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe  $S$  horizontal. On appelle  $H$  l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal  $S'$ .

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse  $X(t = 0) = X_0$  et le solide 2 est à l'altitude  $H(t = 0) = H_0$ .

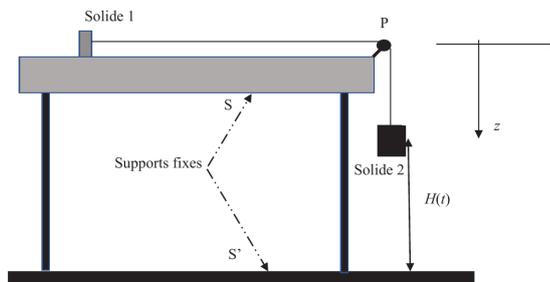


Figure 1: Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient  $f_g$  de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de  $S$  et celui du solide 1. On mesure la distance  $D$  parcourue par le solide 1 sur le support  $S$ , sachant que le solide 2 touche  $S'$  avant que le solide 1 ne s'arrête.

**Consignes :** on note  $g$  l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement  $T$  et  $N$  les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support  $S$  sur le solide 1 (figure 1), avec  $f_g$  le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

8. Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu. (2)
9. La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme  $F$  de la tension du fil est conservée tout le long du fil. On considère la phase de traction.  
En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $M$ , l'accélération horizontale  $\ddot{X}$  du solide 1 et l'accélération verticale  $\ddot{Z}$  du solide 2. (3)
10. Traduire la loi de Coulomb pour exprimer  $\vec{T}$ . (0,5)
11. On s'intéresse à la première phase du mouvement.
  - a) Exprimer le lien entre  $\ddot{X}$  et  $\ddot{Z}$  en le justifiant dans cette première phase. (1)
  - b) Établir dans cette phase la vitesse  $\dot{X}(t)$  en fonction de  $\alpha$ ,  $f_g$  et  $g$ . (3)
  - c) Quelle est la durée  $t_1$  de cette première phase ? (1,5)
  - d) Quelle est la vitesse correspondante atteinte  $V_1$  ? (1)
12. On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
  - a) Exprimer  $X(t)$  dans cette phase en fonction de  $t$ ,  $t_1$ ,  $V_1$ ,  $X_0$ ,  $H_0$ ,  $g$  et  $f_g$ . (2)
  - b) Exprimer  $f_g$  en fonction de  $\alpha$ ,  $H_0$  et  $D$ . (3)
13. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement. (4)
14. On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de  $H_0 = 40,0$  cm. La masse du solide 1 vaut  $M = 50$  g et celle du solide 2 vaut  $\alpha M = 60$  g. Calculer la valeur du coefficient de frottement  $f_g$  sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance  $D$  égale à  $\langle D \rangle = 1,50$  m. (1)

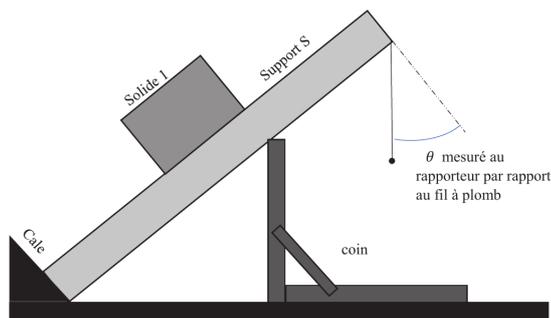
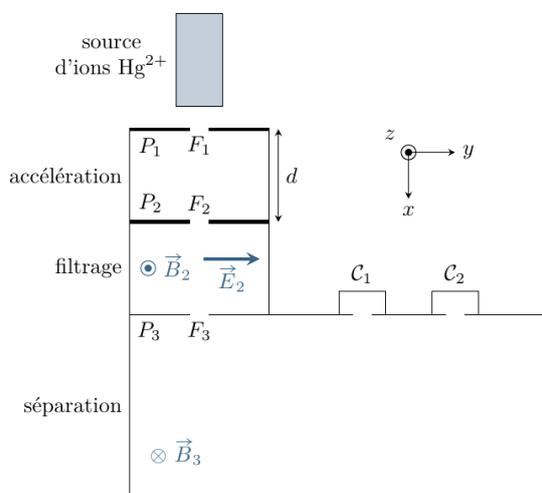


Figure 2: Deuxième dispositif : mesure du coefficient de frottement Statique.

## 2.2 Mesure du coefficient de frottement statique (3 points)

15. On pose maintenant le solide 1 sur le support  $S$  qui fait un angle  $\theta$  avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 2. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle  $\theta$  en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur  $\theta = \theta_{lim}$  le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement statique. (2)
16. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de  $\theta_{lim}$  est de l'ordre de  $29,5^\circ$ . En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré. (1)

## 3 Spectrométrie de masse (23 points)



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse des particules chargées avec une précision telle qu'il donne accès aux compositions isotopiques des éléments chimiques.

Dans le dispositif considéré, une source émet des ions mercure  ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$  et  ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ .

Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente  $F1$ . Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Deux collecteurs  $C1$  et  $C2$  sont placés dans la chambre de séparation.

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple  $m$  (pour un calcul littéral) et  $m_{200}$  ou  $m_{202}$  pour les applications numériques.

### 3.1 Accélération des ions

Un ion mercure, de masse  $m$  et charge  $2e$  entre dans le spectromètre par la fente  $F1$ . On néglige sa vitesse initiale. Une tension  $U = 10,0 \text{ kV}$  appliquée entre les plaques  $P1$  et  $P2$  séparées de  $d = 1,00 \text{ m}$  permet de l'accélérer jusqu'à la fente  $F2$ .

1. Déterminer la direction et le sens du champ accélérateur  $\vec{E}$ . En déduire la plaque de potentiel le plus élevé. (2)
2. Exprimer  $E_1$  en fonction des données et calculer numériquement sa valeur. (2)
3. Établir l'expression littérale de la vitesse  $v$  de l'ion lorsqu'il atteint la plaque  $P2$ . (2)
4. On trouve numériquement des vitesses valant  $1,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $1,39 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible ? (1)

### 3.2 Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P2 et P3, il règne un champ électromagnétique composé de :

- un champ électrique  $\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_y$  uniforme et valant  $E_2 = 5,30 \cdot 10^4 \text{V/m}$
- un champ magnétique  $\vec{B}_2 = B_2 \vec{u}_z$  uniforme et valant  $B_2 = 383 \text{mT}$

On suit un ion qui traverse la plaque  $P_2$  par la fente  $F_2$  avec une vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ .

5. À quelle condition sur les forces qu'il subit, l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de  $F_2$  à  $F_3$  ?(1)
6. En déduire que seuls les ions de vitesse  $v = v_0 = E_2/B_2$  parviennent en  $F_3$  .(2)
7. Numériquement,  $v_0 = 1,38 \cdot 10^5 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . En déduire quel isotope du mercure parvient en  $F_3$  avec ces réglages.(1)

### 3.3 Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de  $E_2$  pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de  $B_2$  reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente  $F_3$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{u}_z$  valant 200 mT. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il peut être capté par l'un des collecteurs C1 ou C2 .

8. Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.(2)
9. Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.(6)
10. Numériquement, on trouve respectivement 71,8 cm et 72,5 cm pour les deux isotopes. En déduire quel collecteur C1 ou C2 capte quel isotope et déterminer la distance  $\Delta y$  devant séparer les entrées des deux détecteurs.(2)
11. Les charges totales accumulées par les collecteurs valent respectivement  $Q_1 = 3,85 \cdot 10^{-8} \text{C}$  et  $Q_2 = 1,15 \cdot 10^{-8} \text{C}$ . En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.(2)