

Devoir surveillé : Mécanique

Ce DS comporte 3 problèmes complètement indépendants. À l'intérieur de chaque problème les sous-parties sont très souvent indépendantes. Le plus grand soin est attendu quant aux justifications des réponses.

1 Orages en montagne

D'après Concours ATS 2022

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

1.1 Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse m , qui chute dans le champ de pesanteur g . On note z un axe descendant vers le sol. $z = 0$ marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note \vec{u}_z un vecteur unitaire orienté vers le bas. On néglige ici tout frottement.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en $z = 0$). (1,5)
2. Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de z . (2)
3. Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

1.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z$ la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{u}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \rho_{air} \pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0,5$.

4. Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.
5. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α , m et g .

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim} , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Python retranscrit ci-dessous :

```
g = 9.8
alpha = 1.5*10**(-3)
m = 0.24
dt = 0.02 #pas integration en secondes
fin = 15 #duree de la simulation en secondes
nb_iterations = int(fin/dt)

# creation des tableaux contenant
```

```

# le temps, la position et la vitesse
z = np.zeros(nb_iterations)
t = np.zeros(nb_iterations)
v = np.zeros(nb_iterations)

####Initialisation

z[0] = [0] # position initiale
v[0] = [0] # vitesse initiale

for i range(nb_iterations):
    t[i+1] = t[i] + dt
    z[i+1] = # completer
    v[i+1] = # completer

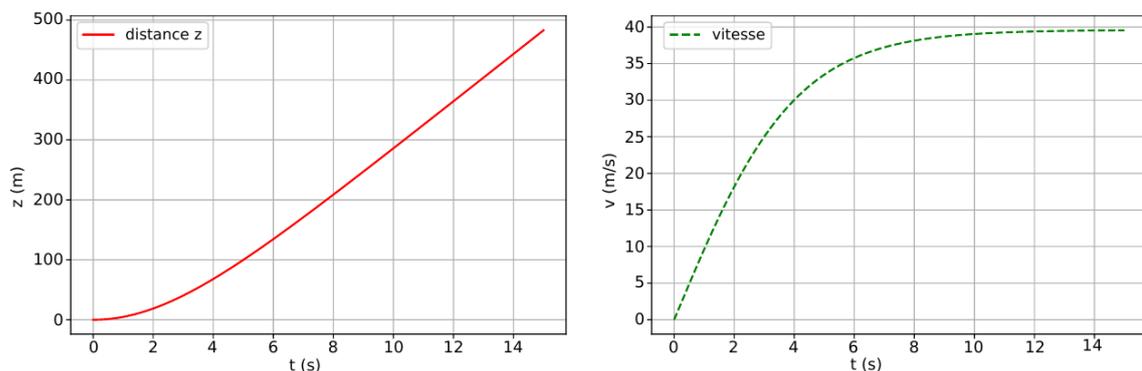
```

Les valeurs de m et α sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

6. Compléter le code précédent.

7. Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ obtenus par l'algorithme.

La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations ? Déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.



Document 9 : position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

Correction :

- $E_p = C - mgz$ Attention à l'axe vertical descendant ! L'énoncé précise que $E_p(0) = 0$ donc $C = 0$.
- $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$. En l'absence de frottement, le système est conservatif donc $E_m(0) = E_m(z) = 0$ donc $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz = 0$ et $v = \sqrt{2gz}$.
- Application numérique : $v = \sqrt{2 \times 10 \times 1000} \approx 140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 500 \text{ km/h}$. L'énoncé dit que leur vitesse au sol avoisine les 100 km/h . Cela n'est pas cohérent avec notre modélisation. Il n'est pas raisonnable de négliger les frottements.
- La seconde loi de Newton s'écrit : $\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\vec{u}_z - \alpha v^2\vec{u}_z$ Soit en projection sur \vec{u}_z :

$$\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v^2$$

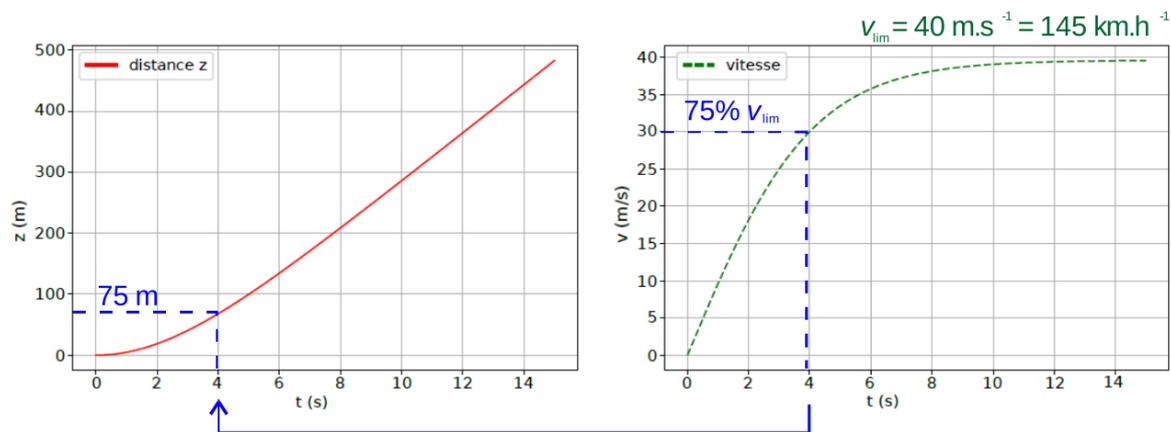
- Pour v_{lim} , $0 = mg - \alpha v_{lim}^2$ soit $v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$.

```

6. for i range(nb_iterations):
    t[i+1] = t[i] + dt
    z[i+1] = z[i] + v[i]*dt
    v[i+1] = v[i] + dt*(mg-alpha v**2)/m

```

7. La vitesse de chute au sol d'un grêlon avoisine les 100 km/h. La vitesse limite de ce modèle (145 km/h) est mieux que dans le modèle sans frottement mais elle reste surestimée. Le grêlon atteint 75% de v_{lim} au bout d'une distance de 75 m.



2 Lois de Coulomb relatives au glissement (CCINP2020)

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et \vec{T} et \vec{N} les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante T est inférieure à la quantité $f_s N$ dans laquelle N représente la norme de la composante normale \vec{N} telle que $T \leq f_s N$.
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $T = f_g N$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$.

2.1 Mesure du coefficient de frottement dynamique (22 points)

On utilise le dispositif représenté sur la figure 1. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S' .

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S , sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (figure 1), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

1. Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu. (2)

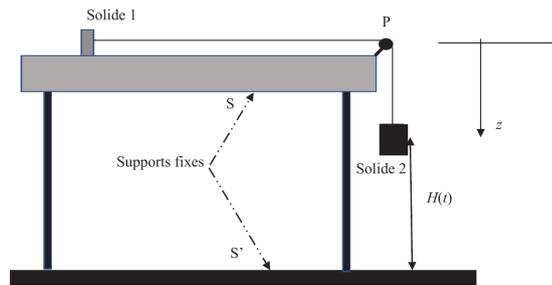


Figure 1: Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

2. La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. On considère la phase de traction.
En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient N , T , F , g , α , M , l'accélération horizontale \ddot{X} du solide 1 et l'accélération verticale \ddot{Z} du solide 2. (3)
3. Traduire la loi de Coulomb pour exprimer \vec{T} . (0,5)
4. On s'intéresse à la première phase du mouvement.
 - a) Exprimer le lien entre \ddot{X} et \ddot{Z} en le justifiant dans cette première phase. (1)
 - b) Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α , f_g et g . (3)
 - c) Quelle est la durée t_1 de cette première phase ? (1,5)
 - d) Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ? (1)
5. On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
 - a) Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t , t_1 , V_1 , X_0 , H_0 , g et f_g . (2)
 - b) Exprimer f_g en fonction de α , H_0 et D . (3)
6. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement. (4)
7. On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40,0$ cm. La masse du solide 1 vaut $M = 50$ g et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60$ g. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1,50$ m. (1)

2.2 Mesure du coefficient de frottement statique (3 points)

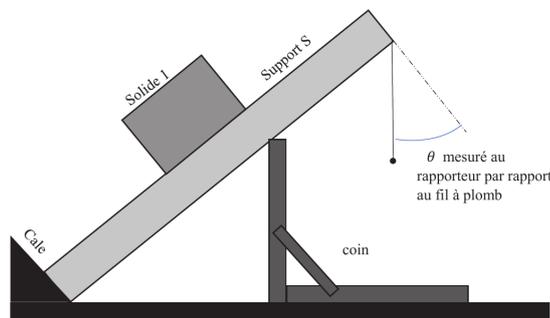


Figure 2: Deuxième dispositif : mesure du coefficient de frottement Statique.

8. On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 2. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement statique. (2)

9. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de l'ordre de $29,5^\circ$. En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.(1)

SESSION 2020



MP2PC

□ 1 – Définition du cours. $\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2 \in \mathcal{S}_2 \mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1 \in \mathcal{S}_1 \mathcal{R}}$

Cette relation est valable pour tout référentiel. On trouve la vitesse d'entraînement dans chaque terme de la soustraction.

□ 2 – On passe de l'adhérence au glissement dès que $T = f_s N$

□ 3 – On passe du glissement à l'adhérence dès que $\vec{v}_g = \vec{0}$

□ 4 – **Phase 1** : accélération de \mathcal{S}_1 car $F = \alpha mg > f_s mg$. Durant cette phase, le fil est tendu.

Phase 2 : Le solide \mathcal{S}_1 ne subit plus que $-f_g mg \vec{e}_x$ selon la direction horizontale. Le solide est freiné jusqu'à l'arrêt $\vec{v}_g = \vec{0}$. Le fil n'est plus tendu.

□ 5 – Durant la phase 1, on écrit le théorème de la résultante cinétique pour chacun des deux solides :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} F - T & = & m\ddot{X} \\ -mg + N & = & 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} -F + \alpha mg & = & \alpha m\ddot{Z} \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

□ 6 – La Loi de Coulomb pour le glissement s'écrit $T = f_g N$

□ 7 – a) Le fil est inextensible donc $\dot{X} = \dot{Z}$ et $\ddot{X} = \ddot{Z}$

b) On a donc, d'après la question 5 :

$$F = -\alpha m\ddot{Z} + \alpha mg \quad \text{soit} \quad F = \alpha m(g - \ddot{X}) \quad \text{et donc} \quad m\ddot{X} = \alpha m(g - \ddot{X}) - f_g mg$$

$$\iff \ddot{X} = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) g$$

On intègre avec $\dot{X}(t=0) = 0$

$$\dot{X} = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) gt$$

c) La phase s'arrête quand $H(t) = 0$. On intègre encore une fois avec $X(t=0) = 0$:

$$X = \frac{1}{2}gt^2 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$$

Le solide s'arrête lorsque $X(t_1) - X_0 = H_0 \iff X(t_1) = H_0$. On aboutit à $t_1 = \sqrt{\frac{2H_0}{g} \frac{\alpha + 1}{\alpha - f_g}}$

d) On reporte dans $\dot{X}(t_1)$ dans b)

$$V_1 = \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right) \sqrt{2gH_0 \frac{\alpha + 1}{\alpha - f_g}} \iff V_1 = \sqrt{2gH_0} \sqrt{\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1}}$$

□ 8 – On s'intéresse maintenant à la deuxième phase du mouvement :

a) \mathcal{S}_1 subit \vec{P} et \vec{R} soit $m\ddot{X} = -f_g mg \iff \ddot{X} = -f_g g$ qu'on intègre avec $\dot{X}(t_1) = V_1$:

$$\dot{X}(t) = V_1 - f_g g(t - t_1)$$

et une seconde intégration avec $X(t_1) = H_0 + X_0$ aboutit à :

$$X(t) = V_1(t - t_1) - f_g g \frac{(t - t_1)^2}{2} + H_0 + X_0$$

b) La fin du glissement correspond à $\dot{X}(t_f) = 0 \iff (t_f - t_1) = \frac{V_1}{f_g g}$.

On a par définition $D = X(t_f) - X_0 \iff \dots D = \frac{1}{2} \frac{V_1}{f_g g} + H_0$.

De plus on a établi en 7)d) $V_1^2 = 2gH_0 \times \frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1}$.

Quelques calculs amènent à $f_g = \frac{\alpha}{1 + (\alpha + 1) \frac{D - H_0}{H_0}}$.

□ 9 – On applique le théorème de l'énergie cinétique à $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ durant la première phase. $\Delta E_c = \Delta E_{c,1} + \Delta E_{c,2} = W(\vec{P}_2) + W(\vec{T}) \iff \frac{1}{2}(\alpha + 1)V_1^2 = \alpha mgH_0 - f_g mgH_0 = mgH_0(\alpha - f_g) \iff$

$V_1^2 = 2gH_0 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$. On retrouve la relation établie dans 7)d).

On applique le TEC à \mathcal{S}_1 seul cette fois. \mathcal{S}_2 est au sol. Le fil n'est plus tendu. Seule la force de frottement travaille : $\Delta E_{c,1} = W(\vec{T}) \iff -\frac{1}{2}V_1 = -f_g mg(D - H_0)$ soit $V_1^2 = 2f_g g(D - H_0)$.

Combinant les deux résultats, on obtient $D - H_0 = H_0 \left(\frac{\alpha - f_g}{\alpha + 1} \right)$ et on retrouve $f_g = \frac{\alpha}{1 + (\alpha + 1) \frac{D - H_0}{H_0}}$

établi en 8)b).

□ 10 – On réalise l'application numérique avec $\alpha = \frac{\alpha m}{m} = \frac{60}{50} = 1,2$, $H_0 = 40$ cm et $D = 150$ cm.

$f_g = 0,46$. Ce qui est tout à fait envisageable comme ordre de grandeur.

□ 11 – Question classique de cours. On est à la limite du glissement $T = f_s N$ et ici $N = mg \cos \theta$. Le solide subit le poids et la force de frottement et est encore immobile : $mg \sin \theta = f_s mg \cos \theta \iff$

$f_s = \tan(\theta_{\text{lim}})$

□ 12 – L'application numérique donne $f_s = 0,57$. On a bien $f_s > f_g$ comme attendu.

□ 13 – Tant que la vitesse de glissement est nulle, $\vec{v} = \vec{v}_{\text{tapis}} = \vec{V}$. On a ainsi $X(t) = Vt + X_0$.

Il y a glissement dès que $T = f_s N$. Dans \mathcal{R}_T galiléen (\mathcal{R}' l'est aussi puisqu'il est en translation rectiligne uniforme dans \mathcal{R}_T galiléen), le PFD s'écrit :

$$\begin{cases} -kX + T = 0 \\ -mg + N = 0 \end{cases}$$

a) A la limite de glissement, on a $T = f_s N = f_s mg$ et $kX_1 = f_s mg$ soit $X_1 = \frac{f_s mg}{k}$.

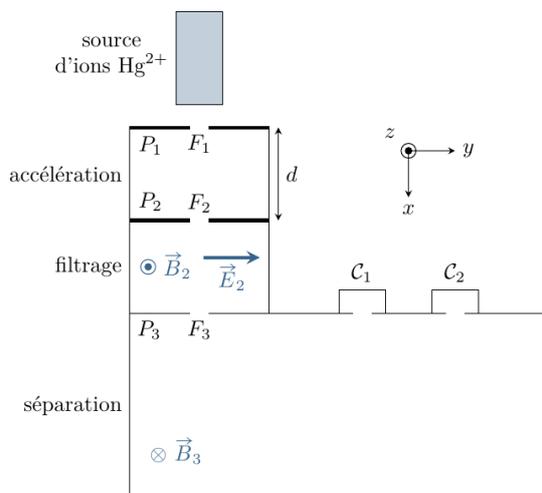
b) et $t_1 = \frac{X_1 - X_0}{V} \iff t_1 = \frac{\frac{f_s mg}{k} - X_0}{V}$.

□ 14 – Dès le début de glissement, $T = f_d N = 0$ puisque $f_d = 0$ dans notre cas.

a) L'application du PFD donne $m\ddot{X} = -kX$ soit $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) \nexists force dissipative. L'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = \frac{1}{2}kX^2 + E_{p,p}$ soit $E_p = \frac{1}{2}kX^2$ en prenant $E_{p,p} = 0$ à la hauteur fixe considérée. $E_c = \frac{1}{2}m\dot{X}^2$. L'énergie potentielle

3 Spectrométrie de masse (23 points)



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse des particules chargées avec une précision telle qu'il donne accès aux compositions isotopiques des éléments chimiques.

Dans le dispositif considéré, une source émet des ions mercure ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.

Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente F_1 . Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Deux collecteurs C_1 et C_2 sont placés dans la chambre de séparation.

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple m (pour un calcul littéral) et m_{200} ou m_{202} pour les applications numériques.

3.1 Accélération des ions

Un ion mercure, de masse m et charge $2e$ entre dans le spectromètre par la fente F_1 . On néglige sa vitesse initiale. Une tension $U = 10,0 \text{ kV}$ appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de $d = 1,00 \text{ m}$ permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2 .

- Déterminer la direction et le sens du champ accélérateur \vec{E} . En déduire la plaque de potentiel le plus élevé.(2)
- Exprimer E_1 en fonction des données et calculer numériquement sa valeur.(2)
- Établir l'expression littérale de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2 .(2)
- On trouve numériquement des vitesses valant $1,38 \cdot 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $1,39 \cdot 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible?(1)

3.2 Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F_2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P_2 et P_3 , il règne un champ électromagnétique composé de :

- un champ électrique $\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_y$ uniforme et valant $E_2 = 5,30 \cdot 10^4 \text{ V/m}$
- un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2 \vec{u}_z$ uniforme et valant $B_2 = 383 \text{ mT}$

On suit un ion qui traverse la plaque P_2 par la fente F_2 avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$.

- À quelle condition sur les forces qu'il subit, l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de F_2 à F_3 ?(1)
- En déduire que seuls les ions de vitesse $v = v_0 = E_2/B_2$ parviennent en F_3 .(2)
- Numériquement, $v_0 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.(1)

3.3 Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_2 pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de B_2 reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente F_3 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$, l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{u}_z$ valant 200 mT. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi-tour il peut être capté par l'un des collecteurs C1 ou C2.

8. Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.(2)
9. Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.(6)
10. Numériquement, on trouve respectivement 71,8 cm et 72,5 cm pour les deux isotopes. En déduire quel collecteur C1 ou C2 capte quel isotope et déterminer la distance Δy devant séparer les entrées des deux détecteurs.(2)
11. Les charges totales accumulées par les collecteurs valent respectivement $Q_1 = 3,85 \cdot 10^{-8}$ C et $Q_2 = 1,15 \cdot 10^{-8}$ C. En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.(2)

Correction :

II - Spectrométrie de masse

❖ *Barème : 23 pts au total*

II.A - Accélération des ions

16 L'ion mercure Hg^{2+} est un cation, chargé positivement. Lorsqu'il est placé dans un champ électrique seul, il subit la force de Lorentz électrique $\vec{F}_E = 2e\vec{E}$ de même direction et même sens que le champ électrique. Pour l'accélérer il faut donc que le champ dans la chambre d'accélération vaille

$$\boxed{\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x} \quad \text{avec} \quad E_1 > 0.$$

Le sens de \vec{E}_1 dépend du signe de la charge accélérée (il serait différent pour des électrons), il doit donc être explicitement justifié.

Comme le champ électrique est dirigé vers les potentiels les plus bas, on en déduit que **la plaque P_2 doit être portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1 .**

❖ *Barème : 2 pts*

17 En termes de potentiel $U = V(P_1) - V(P_2)$. La travail de la force électrique subie par une particule de charge q placée dans ce dispositif vaut $qE_1 \times d$ avec l'expression de la force, et est égal à qU par définition de l'énergie potentielle électrostatique. On en déduit

$$W_E \underset{\text{force}}{=} qE_1 d \underset{E_p}{=} qU$$

Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \frac{U}{d} = 1,00 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

18 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{pe} = 2eV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 et P_2

$$\frac{1}{2} m v(P_1)^2 + 2e V(P_1) = \frac{1}{2} m v(P_2)^2 + 2e V(P_2)$$

$$0 + 2e V(P_1) = \frac{1}{2} m v^2 + 2e V(P_2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = 2e [V(P_1) - V(P_2)]$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4eU}{m}}}$$

❖ *Barème : 2 pts*

19 Les deux isotopes ne comptent que deux neutrons de différence, sur un total de 200 : **leur masse diffère donc de à peine 1 %**, et comme de plus elle apparaît sous une racine dans l'expression de v il n'est pas surprenant que l'écart entre les deux vitesses soit très faible.

❖ *Barème : 1 pt*

II.B - Filtrage en vitesse

20 L'ion ne peut avoir un mouvement rectiligne entre les fentes F_2 et F_3 que si la **résultante des forces qu'il subit est dirigée selon \vec{e}_x** .

Attention à ne pas confondre mouvement rectiligne « tout court » et mouvement rectiligne uniforme. Rien n'impose ici a priori que la résultante des forces subies par l'ion soit nulle.

❖ *Barème : 1 pt*

21 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz, et son poids est négligeable. Cette force s'écrit

$$\vec{F}_L = 2e \left[\vec{E}_2 + \vec{v} \wedge \vec{B}_2 \right] = 2e [E_2 \vec{e}_y + vB_2(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)] = 2e(E_2 - vB_2)\vec{e}_y.$$

Comme cette force n'est jamais dirigée selon \vec{e}_x , on en déduit que l'ion n'a une trajectoire rectiligne que si elle est nulle, c'est-à-dire

$$E_2 - vB_2 = 0 \quad \text{soit} \quad v = v_0 = \frac{E_2}{B_2}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

22 En comparant avec les valeurs données question 19, ce sont les ions les plus lents qui traversent le filtre. D'après la question 18, ce sont les plus lourds : ce sont donc **les ions de l'isotope 202** qui passent au travers du filtre.

❖ *Barème : 1 pt*

II.C - Séparation des ions

23 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_B = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte} \quad \text{et} \quad v = \text{cte} = v_0.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

❖ *Barème : 2 pts*

24 Comme la trajectoire est circulaire, on la décrit en coordonnées cylindriques de centre le centre de la trajectoire et d'axe z . D'après le PFD appliqué à l'ion modélisé comme un point matériel,

$$m\vec{a} = \vec{F}_L \quad \text{soit} \quad -m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}_3$$

en utilisant l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme. Compte tenu de la géométrie du dispositif, on devine que l'ion tourne en sens trigonométrique, sinon il n'atteindrait jamais les collecteurs : on a donc $\vec{v} = +v_0\vec{e}_\theta$ car le mouvement est uniforme. On peut le vérifier à partir du sens du champ magnétique $\vec{B}_3 = -B_3\vec{e}_z$. Cela permet d'exprimer le produit vectoriel,

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = -v_0B_3(\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -v_0B_3\vec{e}_r.$$

On déduit du PFD projeté sur \vec{e}_r

$$m\frac{v_0^2}{R} = 2ev_0B_3 \quad \text{donc} \quad R = \frac{mv_0}{2eB_3}.$$

En remplaçant v_0 par son expression déterminée à la question 18,

$$R = \sqrt{\frac{m^2}{4e^2B_3^2} \times \frac{4eU}{m}} \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt{\frac{mU}{eB_3^2}}.$$

❖ *Barème : 6 pts : 2 pour le PFD circulaire uniforme, 2 pour la force de Lorentz si justifié, 2 pour le résultat.*

25 Le rayon est d'autant plus grand que l'ion est massif : **le collecteur C_1 récupère l'isotope 200 et C_2 l'isotope 202**. Les deux cercles trajectoires passent tous les deux en F_3 où ils sont tangents, si bien que les entrées des collecteurs aux points diamétralement opposés doivent être séparées de

$$\Delta y = 2(R_{202} - R_{200}) = 1,4 \text{ cm}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

26 La charge totale est proportionnelle au nombre d'ions reçus, puisque chaque ion est chargé $+2e$. On en déduit alors les proportions isotopiques α_{200} et α_{202} ,

$$\alpha_{200} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = 77\% \quad \text{et} \quad \alpha_{202} = \frac{N_2}{Q_1 + Q_2} = 23\%.$$

❖ *Barème : 2 pts*