

Devoir surveillé : Mécanique

Durée 4h

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

La propreté de la copie est évalué sur 1 points.

La calculatrice n'est pas autorisée.

1 Exercice Saut à Ski (22 points)

L'une des disciplines reines des jeux olympiques d'hiver, avec le ski alpin et le biathlon, est le saut à skis. Dans cette épreuve, les sauteurs s'élancent du haut d'un tremplin (décrit ci-dessous), cherchent à y gagner le maximum de vitesse, puis sautent et tentent d'aller le plus loin possible en "prenant appui sur l'air".

Un tremplin de saut à ski est composé de 3 portions :

- une portion AB rectiligne, de longueur $l = 50$ m pour un tremplin K120, incliné de $\alpha = 39^\circ$ sous l'horizontal ;
- une portion BC circulaire, de rayon $R = 100$ m et de centre de courbure O ;
- une portion CD rectiligne, de longueur $l' = 7$ m, incliné de $\beta = 10^\circ$ sous l'horizontal.

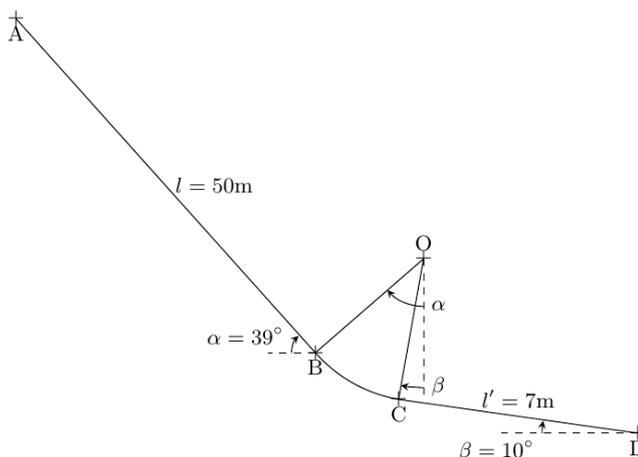


Figure 1: Schéma du dispositif

Les sauteurs à skis sont des poids plumes (pour mieux voler). Ils ne pèsent en général que 60kg. Tout au long de ce problème, on assimilera les sauteurs à des points matériels de masse $m = 60$ kg.

1.1 Course d'élan sur la portion AB (8,5 points)

On néglige dans un premier temps tous les frottements.

1. Le sauteur s'élanche du point A à vitesse nulle. On cherche à déterminer sa vitesse au point B. Expliquer, en quelques mots, quel théorème énergétique est le plus approprié pour déterminer cette vitesse. (1)
2. Déterminer, en utilisant un théorème énergétique, la vitesse v_B du sauteur au point B. On donnera l'expression littérale et une application numérique à 2 chiffres significatifs. On prendra $g = 10\text{m/s}^2$. Une aide numérique est proposée en fin de problème. (2)
3. **On ne néglige plus les frottements solides.** Les frottements fluides sont toujours négligés. On modélise les frottements solides par une composante tangentielle au support \vec{R}_T , opposée à la vitesse, dont la norme R_T vaut $a = 0,04$ fois la norme de la composante normale du support R_N :

$$R_T = a \times R_N$$

En déduire la nouvelle vitesse v'_B atteinte par le skieur, en B. On donnera l'expression littérale et une application numérique à 2 chiffres significatifs. Conclure sur l'impact des frottements solides. (2)

4. On ne néglige plus les frottements fluides, mais on néglige à nouveau les frottements solides. On modélise les frottements fluides par une force proportionnelle à la vitesse. On donne le coefficient de frottement ou coefficient de trainée $\lambda = 6 \text{ kg/s}$.

- Donner la forme de la force de frottement.(0.5)
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} du skieur. La résoudre.(2)
- En déduire que la distance parcourue $d(t)$ par le skieur se met sous la forme :

$$d(t) = \frac{mg}{\lambda} \sin(\alpha) \left(t + \frac{m}{\lambda} e^{(-\frac{\lambda}{m}t)} - 1 \right)$$

(1)

d)En réalité, un meilleur modèle est un modèle de frottements fluides proportionnels au carré de la vitesse. Ces frottements sont aussi proportionnels au maître couple, c'est-à-dire à la surface projetée sur un plan perpendiculaire à la vitesse du corps qui pénètre dans l'air.

Expliquer pourquoi le skieur à intérêt à se ramasser dans la position dite de l'œuf : les bras tendus vers l'arrière, collé au corps, les jambes à moitié repliées et le buste penché vers l'avant le long des cuisses.

1.2 Force supportée par les jambes du skieur sur la portion BC (4 points)

Le sauteur aborde la portion circulaire BC à une vitesse supposée constante $v_B = 25 \text{ m/s}$.

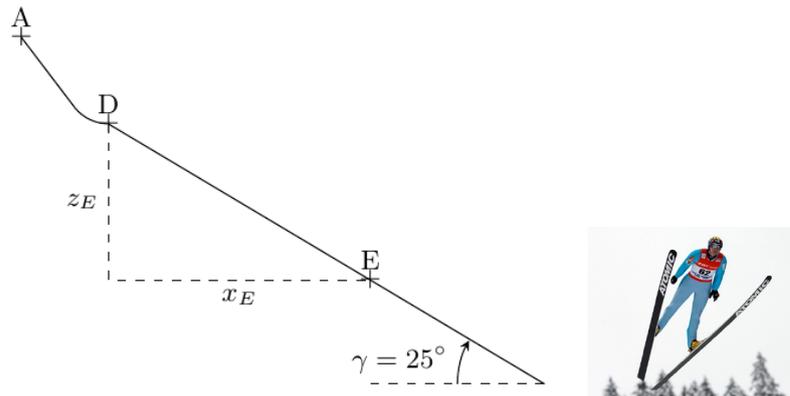
- Qualifier le mouvement du sauteur sur la portion BC. Quel système de coordonnées est le mieux adapté pour décrire ce mouvement. Exprimer alors les vecteurs position, vitesse et accélération dans ce système de coordonnées. Exprimer ensuite l'accélération en fonction de la vitesse v_B .(1)
- On cherche à déterminer la force supportée par les jambes du sauteur, qui est égale à la réaction normale du support. Expliquer en quelques mots quel théorème ou principe de la mécanique est le plus approprié pour répondre à la question.(0.5)
- En déduire l'expression de la force supportée par les jambes, en fonction de la vitesse v_B , de la masse m du sauteur, de l'accélération g de la pesanteur, du rayon R de courbure et d'éventuelles coordonnées spatiales.(1.5)
- Faire l'application numérique et la comparer au poids du sauteur.(1)

1.3 Travail des jambes à fournir sur la portion CD (3.5 points)

Au bout de l'arc courbe BC, la vitesse du sauteur est toujours $v_B = 25 \text{ m/s}$. Le sauteur arrive enfin dans la zone de décollage. Rectiligne, longue de $l' = 7 \text{ m}$, celle-ci pointe légèrement vers le bas, puisque son angle sous l'horizontal est de $\beta = 10^\circ$. La longueur de cette zone est choisie de manière à ce que le skieur la parcoure environ en un quart de seconde seulement.

Dans ce court laps de temps, le skieur, se détend en poussant sur ses jambes. Il transforme ainsi l'énergie mécanique emmagasinée par ses jambes en énergie potentielle d'élévation et surtout en énergie cinétique. La détente du sauteur augmente sa vitesse verticale. Si la synchronisation est bonne, le skieur parvient à se donner à la sortie du tremplin une vitesse optimale, c'est-à-dire horizontale. La longueur du saut dépendra de manière critique de cette vitesse.

- En supposant que la composante tangentielle à la piste de la vitesse reste constante et égale à $v_T = 25 \text{ m/s}$, quel doit être la norme de la composante perpendiculaire à la piste v_N de la vitesse pour que la vitesse \vec{v}_D soit horizontale en sortie de tremplin ? (1.5)
- En négligeant le travail du poids et celui des frottements, quel a du être le travail fourni par le skieur sur la portion CD ?(2)



1.4 Longueur du saut (6 points)

Le skieur atteint le point D avec une vitesse \vec{v}_D horizontale, de norme $v_D = 25$ m/s. On commence par un modèle simpliste où l'on néglige tous les frottements.

11. Établir les équations horaires du mouvement du sauteur. En déduire sa trajectoire. (2)
12. La piste est modélisée par une pente inclinée d'un angle $\gamma = 25^\circ$, supposée rectiligne (par souci de simplification). Le skieur atteint la piste au point E. Déduire de la question précédente la longueur x_E du saut. (2)
13. En fait, le sauteur adopte une position en V lui permettant d'augmenter sa portance et de "prendre appui sur l'air", tout comme une aile d'avion. On modélisera ici la portance par une force \vec{F}_P dirigée selon la verticale et de norme 300N. Déduire la nouvelle distance parcourue par le sauteur avant l'atterrissage. (1)
14. Montrer l'intérêt pour un sauteur d'être le plus léger possible. (1)

Aide numérique

$g = 10\text{m/s}^2$		
$\sin 39^\circ \approx \frac{5}{8}$	$\tan 39^\circ \approx \frac{4}{5}$	$\cos 39^\circ \approx \frac{3}{4}$
$\sin 10^\circ \approx 0,17$	$\tan 10^\circ \approx 0,18$	$\cos 10^\circ \approx 0,98$
$\sin 25^\circ \approx 0,4$	$\tan 25^\circ \approx 0,5$	$\cos 25^\circ \approx 0,9$
$\sqrt{3} = 1,7$	$\sqrt{5} = 2,2$	$\sqrt{10} = 3,1$

Correction :

2 Saut à ski

2.1 Course d'élan sur la portion AB

1. Sur cette portion, la seule force qui travaille est le poids. C'est une force conservative donc l'énergie mécanique se conserve. Soit $\Delta E_p + \Delta E_c = 0$ L'énergie mécanique initiale se conserve E_m , elle correspond à l'énergie potentielle initiale car $v(0) = 0$: $E_m = mgz_A$.
2. $v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} \approx 25$ m/s
3. Le théorème de l'énergie cinétique donne : $\Delta E_c = W_c + W_{nc} = -\Delta E_p + W_f$ avec

$$W_f = \int_A^B \vec{R}_T \cdot \vec{d\ell} = - \int_A^B R_T d\ell = -a R_N l = -amg \cos \alpha$$

ce qui conduit à

$$v'_B = \sqrt{2gl(\sin \alpha - a \cos \alpha)} \approx 23 \text{ m/s}$$

Les frottements diminuent la vitesse.

4. a) $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

b) Un bilan des forces suivi d'un PFD donne $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda \vec{v} + \vec{R}_N$ En projetant parallèlement à la pente on trouve : $\dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = g \sin \alpha$. ce qui s'intègre en :

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda} \sin(\alpha) \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

c) Il suffit d'intégrer la vitesse une fois.

2.2 Force supportée par les jambes du skieur sur la portion BC

Le sauteur aborde la portion circulaire BC à une vitesse supposée constante $v_B = 25 \text{ m/s}$.

5. Mouvement de rotation autour du point O, système de coordonnées cylindriques. Le skieur reste sur la piste donc le rayon r est constant :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r; \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta; \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Or la vitesse est constante donc $\ddot{\theta} = 0$ et $v_B = \dot{\theta}r$.

6. On veut déterminer la norme d'une force, l'utilisation du PFD semble plus approprié

7. PFD projeté suivant la direction radiale :

$$mr\dot{\theta}^2 = R_N - mg \cos \theta \implies R_N = m \frac{v_B^2}{R} + mg \cos \theta$$

8. $R_N \in [825, 915] \text{ N}$

2.3 Travail des jambes à fournir sur la portion CD

9. Faire un schéma en plaçant les différentes composantes de vitesses conduit rapidement à :

$$\tan \beta = \frac{v_N}{v_T} \implies v_N = v_T \tan \beta \approx 4,5 \text{ m/s}$$

10. Théorème de l'énergie cinétique : $W = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_N^2 \approx 600 \text{ J}$

2.4 Longueur du saut

11. On écrit cette fois-ci le PFD dans la base cartésienne et on intègre

$$x(t) = v_D t + x_D; z(t) = z_D - 1/2gt^2$$

12. Intersection entre la trajectoire et l'équation de la pente. Prenons comme origine $(x_D, z_D) = (0, 0)$:

$$z(x) = -1/2g\left(\frac{x}{v_D}\right)^2 = -\frac{z_E}{x_E}x = -x \tan \gamma$$

$$\text{Soit } x_E = \frac{2v_D^2 \tan \gamma}{g} \approx 72,5 \text{ m}$$

13. De même en remplaçant mg par $mg - F_p$: $x_E = \frac{2v_D^2 \tan \gamma}{g - F_p/m} \approx 125 \text{ m}$

14. Plus m est petite plus la portance devient importante vis-à-vis du poids et donc le skieur allonge son saut.

3 Mouvement d'un proton dans un cyclotron (22 points)

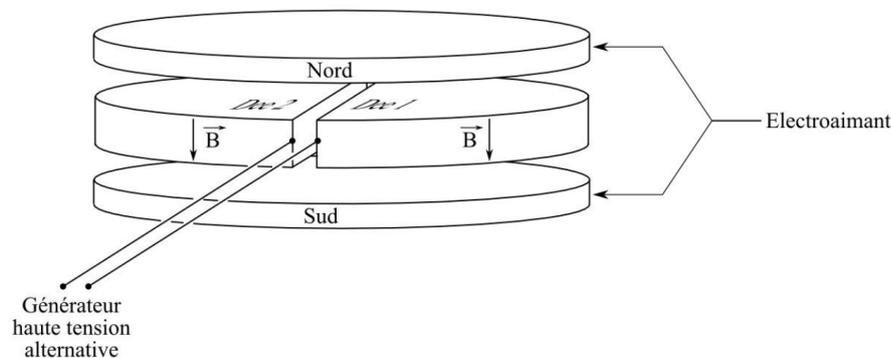
ENSTIM épreuve commune 2010

Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} afin d'accélérer des particules chargées.

Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur.

Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron. En France, il existe deux principaux centres utilisant cette technique : Nice (protons de 65 MeV) et Orsay (protons de 200 MeV).

On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre. Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique uniforme \vec{B} et constant d'intensité $B = 1,67$ T. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100$ kV crée un champ \vec{E} perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_P = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et de charge $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A 0 de l'espace séparant les deux Dees. (Voir Annexe)

Dans tout le problème, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

3.1 Étude du mouvement dans les Dees (15 points)

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse v_1 , de valeur v_1 (voir feuille annexe).

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme. (1.5)
2. Représenter sur le schéma 1 de la feuille annexe les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2 . (1.5)
3. Démontrer la forme de la pulsation cyclotron ω_c . (2)
4. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir le système d'équations différentielles couplées auxquelles satisfont les composantes V_x et V_y de son vecteur vitesse $\vec{v}(t)$, on exprimera les composantes à l'aide de la pulsation cyclotron. (2)
5. Montrer que ces deux composantes obéissent à des équations différentielles non couplées d'ordre 2. Les résoudre. (4)
6. Montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de rayon $R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$. (1) On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la n ième traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = \frac{V_n}{\omega_c}$.
7. Exprimer, en fonction de R_n la distance d parcourue dans un Dee lors du n ième demi-tour. (1)
8. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m , e et B . (2)

3.2 Étude du mouvement entre les Dees (7 points)

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

9. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique \vec{E} entre les Dees quand le proton décrit A_0A , puis BC . (1)
10. Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe, schéma 1) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees ?(2)
11. Le schéma 2 de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :
 - le moment où le proton passe de A_0 à A , puis lorsqu'il passe de B à C ;
 - la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees. (2)
12. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m , e et B .(2)

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

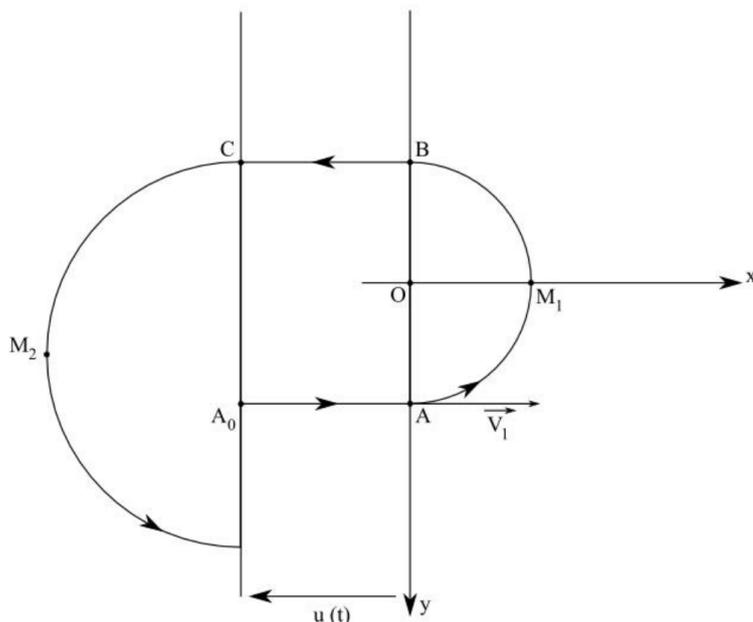


Schéma 1

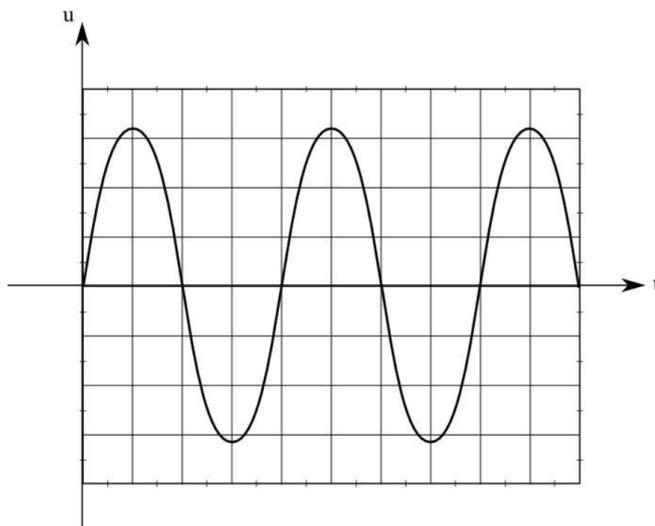


Schéma 2

Correction :

1. Le proton ne subit que la partie magnétique de la force de Lorentz, dont la puissance est nulle. D'après le théorème de l'énergie cinétique, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique. Le mouvement est donc uniforme.

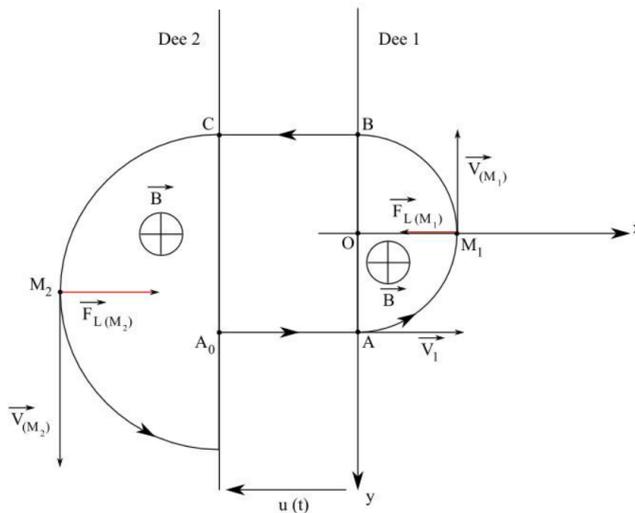


Schéma 1

2.

3. Voir Cours

4. Par application de la relation fondamentale de la dynamique à un proton, dans le référentiel galiléen du laboratoire, on obtient : $m \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{V} \wedge \vec{B}$ qui se projette en

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \omega_c V_y \\ \dot{V}_y &= -\omega_c V_x \end{aligned}$$

5. Il suffit de dériver les deux équations et de réinjecter :

$$\begin{aligned} \ddot{V}_x &= \omega_c \dot{V}_y = -\omega_c^2 V_x \\ \ddot{V}_y &= -\omega_c \dot{V}_x = -\omega_c^2 V_y \end{aligned}$$

On aboutit alors à $x(t) = \frac{V_1}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$ et $y(t) = \frac{V_1}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1]$

6. En éliminant le temps entre les deux, on aboutit à l'équation d'un cercle de rayon
- R_1
- :

$$x^2 + \left(y + \frac{V_1}{\omega_c}\right)^2 = \frac{V_1^2}{\omega_c^2}$$

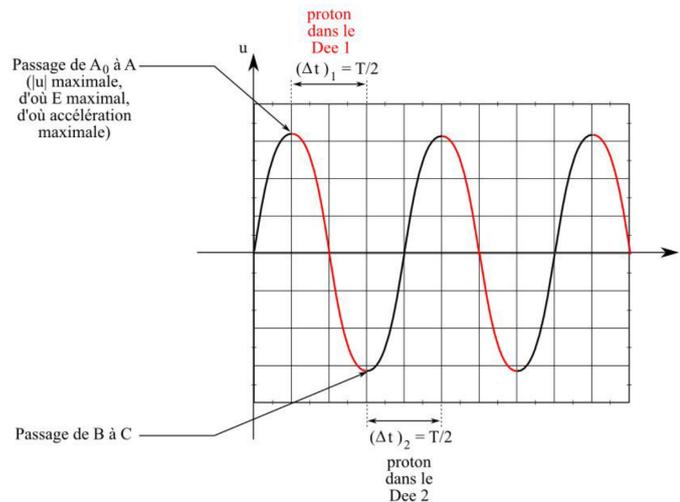
7. On a immédiatement :
- $d = \pi R_n$

8. Le mouvement étant uniforme,
- $\Delta t = \frac{d}{V_n} = \frac{d}{R_n \omega_c} = \frac{m\pi}{eB}$
- , indépendante de la vitesse du proton

3.3 Étude du mouvement entre les Dees

9. Dans les deux cas le champ électrique a la direction de l'axe des abscisses. Pour le passage de A_0 à A , il est orienté dans le sens des x croissants, pour le passage de B à C , il est orienté dans le sens des x décroissants.

Le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants. Pour le passage de A_0 à A , $u(t) > 0$, pour le passage de B à C , $u(t) < 0$.



10.

11. Pour synchroniser le passage des particules de l'entre-dee et les maxima de la tension accélératrice, il faut que la demi-période de $u(t)$ soit égale à Δt : $T = 2\Delta t$,

$$f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{eB}{2m\pi}$$

4 Oscillations amplifiées : Balançoire (16 points)

Dans cet exercice, nous allons étudier un enfant sur une Balançoire, commençant son mouvement sans vitesse depuis une position angulaire $\theta_0 = -20^\circ$ par rapport à la verticale. On néglige tout frottement dans le problème et on suppose que les cordes de la balançoire restent tendues à tout instant. On note \vec{e}_x le vecteur unitaire vertical descendant et (O, \vec{e}_z) l'axe passant par la barre horizontale à laquelle est accrochée la balançoire.

Première approche : on modélise la balançoire par un pendule simple, l'enfant est représenté par un point matériel M de masse $m = 30\text{kg}$, se balançant sur une balançoire dont les cordes ont une longueur de $L = 2\text{m}$.

1. Faire un bilan des forces appliquées sur l'enfant.(1)
2. À l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer la période des petites oscillations de l'enfant sur la balançoire. (3)
3. Par un raisonnement énergétique, montrer que l'enfant, sans aide extérieure, ne peut atteindre de positions angulaires plus grandes que θ_0 . (2.5)

Deuxième approche : On considère maintenant que l'enfant peut changer de position. Il a les pieds sur le siège de la balançoire et peut soit être accroupi, soit être debout ce qui change la position de son centre de masse M : lorsque l'enfant est debout tout se passe comme si la longueur des cordes étaient de $L_2 = 1,5\text{m}$. L'enfant est toujours considéré comme un point matériel.

Afin d'augmenter l'amplitude de son balancement, l'enfant fait varier sa distance à l'axe de rotation au cours des oscillations. Ainsi, au cours de la première phase du mouvement, il est accroupi (L), lorsqu'il passe au point le plus bas de la trajectoire, il se redresse très rapidement (L_2), enfin lorsqu'il atteint l'autre extrémité de son mouvement, il s'accroupi à nouveau.

4. Schématiser la situation.(0.5)
5. Déterminer la vitesse angulaire ω_1 de M juste avant que l'enfant se relève, lorsque la balançoire est verticale. (3) (*il faut résoudre l'équation différentielle*).
6. Déterminer les forces subies par l'enfant lorsqu'il se relève.(1)

7. En supposant que cette phase est rapide et que la balançoire reste verticale pendant cet instant, montrer que le moment cinétique de l'enfant est conservé, en déduire la vitesse angulaire ω_2 de l'enfant une fois relevé et la comparer à la première.(3)
8. En déduire la nouvelle position angulaire θ_1 atteinte par l'enfant.(2)

Correction :

1. L'enfant n'est soumis qu'à son poids et à la réaction de la balançoire similaire à la tension de la corde :

$$\vec{p} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r$$

2. On souhaite appliquer le TMC sur l'axe \vec{u}_z , le calcul des moments donne :

$$Mz_{\vec{p}} = -mgL \sin\theta$$

$$Mz_{\vec{T}} = 0$$

$$L_z = m(L\vec{u}_r \wedge L\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z = mL^2\dot{\theta}$$

Enfinement : $\frac{dL_z}{dt} = Mz_{\vec{p}} + Mz_{\vec{T}}$

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin\theta$$

Pour de petites oscillations on retrouve : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ soit

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2,8s$$

3. Le poids est une force conservative et T ne travaille pas, l'énergie mécanique est donc conservée. En prenant l'énergie potentielle nulle, à la position la plus basse, on en déduit :

$$E_p(\theta) = mgz = mgL(1 - \cos\theta)$$

Or à l'état initial, $E_{m0} = E_p(\theta_0)$ ce qui impose $E_p(\theta) \leq E_p(\theta_0)$ soit $\theta \leq \theta_0$.

4.

5. La résolution de l'équation différentielle donne :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Or en t_1 , $\theta(t_1) = 0 \Rightarrow \omega_0 t_1 = \pi/2$, soit $\omega_1 = -\omega_0 \theta_0 = 0.77\text{rad/s}$

6. Les forces qu'il subit sont les mêmes : la force qui lui permet de se relever est la réaction de la balançoire qui devient temporairement plus importante. Les autres forces sont des forces intérieures.

7. À la verticale, le moment du poids est nul, ainsi : $\frac{dL_z}{dt} = 0$ et le moment cinétique est conservé. On a donc :

$$mL^2\omega_1 = mL_2^2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{L^2}{L_2^2}\omega_1$$

8. Une fois l'enfant debout, le mouvement est à nouveau conservatif et $E_{p,2}(\theta) = mgL_2(1 - \cos\theta)$. Juste après le redressement $E_m = E_c = \frac{1}{2}mL_2^2\omega_2^2$, or au maximum d'amplitude :

$$E_m = E_p(\theta_1)$$

$$\frac{1}{2}mL_2^2\omega_2^2 = mgL_2(1 - \cos\theta_1)$$

$$\theta_1 = \arccos\left(1 - \frac{L^3}{2L_2^3}\theta_0^2\right) = 31^\circ$$