Devoir surveillé : Mécanique et Thermodynamique

Consignes : L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

À l'intérieur des exercices, de nombreuses questions sont indépendantes !
Un soin particulier sera accordé à la rédaction : toutes les réponses devront être justifiées. Toute réponse non justifiée ne donnera pas droit à l'attribution des points.
Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur mais pas en rouge.
L'usage de la calculatrice est interdit.
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être sujet à modifications.

1 Mécanique : Rôle régulateur d'un volant d'inertie (adapté d'un sujet de concours) (11 points)

L'ensemble d'une machine tournante et de son volant d'inertie est assimilable à un solide S mobile autour d'un axe fixe Δ. Nous allons voir qu'un des rôles d'un volant d'inertie est de diminuer les vibrations et stabiliser le fonctionnement d'une machine.

S étant immobile à la date $t = 0$, on lui applique à partir de cette date un couple moteur C_m. On note ω la vitesse angulaire de S à la date t et J le moment d'inertie de S par rapport à l'axe Δ. Des frottements fluides exercent un couple résistant de module $C_r = h\omega$.
Dans un premier temps, on considère que le couple $C_m = C_0$ est indépendant de la date t.

1. Appliquer le théorème du moment cinétique au solide S en projection sur l'axe Δ. (1)
2. En déduire l'expression de la vitesse angulaire ω à la date t. (2)

   À la suite de défauts de fabrication, le couple moteur C_m est maintenant modulé suivant la loi :
   $$C_m(t) = C_0(1 + a\cos(\Omega t))$$
   où a est le taux de modulation.
3. Décrire le type d'équation différentielle obtenue et les régimes étudiés. (1)
4. Étudier le régime sinusoïdal forcé et donner la fonction de transfert du système. (3)
5. En déduire que la solution complète se met sous la forme (3) :
   $$\omega(t) = \frac{C_0}{h}\left[1 - Ke^{-\frac{ht}{J}} + b\cos(\Omega t - \phi)\right]$$
   On explicitera K, le taux de modulation b et le déphasage ϕ de la vitesse angulaire en fonction de a, J , h et Ω.
6. Que convient-il de faire afin d'obtenir une vitesse de rotation aussi constante que possible ? (1)

Correction :

1. Le solide étant soumis aux deux couples donnés dans l'énoncé, et le couple de frottement étant résistant, on a par le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :
$$J\dot{\omega} + h\omega = C_0.$$

2. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, donc la solution générale est de la forme :
$$\omega(t) = Ke^{-ht/J} + \frac{C_0}{h}.$$
Avec la condition initiale $\omega(0) = 0$, on obtient alors $K = -\frac{C_0}{h}$, soit :
$$\boxed{\omega(t) = \frac{C_0}{h}\left(1 - e^{-ht/J}\right)}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation différentielle devient :

$$J\dot{\omega} + h\omega = C_0 + C_0 a\cos(\Omega t).$$

Attention !

Il est important de séparer les déterminations de solutions de l'équation homogène et de la solution particulière, et de ne déterminer la valeur de la constante d'intégration qu'avec la solution générale complète.

L'équation différentielle restant linéaire, on peut décomposer la solution particulière en deux termes ω_1 et ω_2, solutions respectives de :

$$J\dot{\omega}_1 + h\omega_1 = C_0 \quad \text{et} \quad J\dot{\omega}_2 + h\omega_2 = C_0 a\cos(\Omega t).$$

La première équation est la même que précédemment, et la seconde a un second membre sinusoïdal, que l'on peut donc traiter avec le formalisme complexe en régime sinusoïdal forcé (la solution particulière sinusoïdale correspondant au régime permanent).
En notant $\underline{\omega_2}(t) = \underline{\omega}_{2,m}e^{j\Omega t}$ et $\underline{C} = C_0 a e^{j\Omega t}$, l'équation différentielle devient :

$$j\Omega\underline{\omega}_{2,m} + h\underline{\omega}_{2,m} = C_0 a,$$

soit : $\underline{\omega}_{2,m} = \dfrac{C_0 a}{jJ\Omega + h}$, et donc :

$$b = \frac{h|\underline{\omega}_{2,m}|}{C_0} = \frac{ha}{\sqrt{h^2 + (J\Omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg\left(\frac{C_0 a}{h + jJ\Omega}\right) = -\arctan\left(\frac{J\Omega}{h}\right).$$

On a alors $\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t) + \lambda e^{-ht/J}$ qui est de la forme demandée, et on obtient λ par la condition initiale $\theta(0) = 0$:

$$K = -\frac{C_0}{h}\left(1 + \frac{ha}{h^2 + (J\Omega)^2}\right).$$

4. La constante K ne correspond qu'au régime transitoire ; on souhaite donc avoir un taux de modulation b le plus faible possible. Ne pouvant jouer sur h (lié au fonctionnement normal de la machine), a ou Ω (paramètres de la perturbation), il est donc préférable d'avoir un volant d'inertie ayant le plus grand moment d'inertie possible. Pour obtenir de grandes valeurs de J, on répartit la masse du solide le plus loin possible de l'axe, d'où le nom de volant d'inertie.

2 Chute de Philae sur la comète Tchouri (24 points)

Rosetta est une sonde spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est d'étudier le noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et son comportement à l'approche du Soleil. La sonde spatiale a été placée en orbite autour de la comète, puis a largué en novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, dans le but de se poser à sa surface afin d'analyser la composition du sol.
Données : :

- Masse de la comète : $m_{com} = 1 \times 10^{13}\,\text{kg}$
- Masse volumique de la comète : $\mu_{com} = 400\,kg.m^{-3}$
- Constante gravitationnelle : $G = 6.67 \times 10^{-11}\,m^3kg^{-1}s^{-2}$
- Distance de largage par rapport au centre : $r_{larg} = 22km$
- Masse de la sonde Rosetta : $m_{Ros} = 1500\,\text{kg}$
- Masse de l'attérisseur Philae : $m_{Ph} = 98\text{kg}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8\text{m/s}$

On assimile la comète à une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com}.

2.1 Généralités

1. Déterminer le rayon de cette boule r_{com}.(0.5)
   On s'intéresse au mouvement d'un point M, dans un référentiel $(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ dont l'origine est le centre de la comète. On admet que le mouvement a lieu dans le plan $(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$.
2. Justifier que le mouvement est plan.(2)
3. Exprimer dans la base polaire, le vecteur-position $\overrightarrow{r}$ de ce point. (1)
4. En déduire son vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}$ dans la base polaire. (1)
5. En déduire son vecteur-accélération $\overrightarrow{a}$ dans la base polaire. (1)

2.2 Mouvement de Rosetta sur son orbite

On s'intéresse tout d'abord au mouvement de la sonde Rosetta autour de la comète. On considère que sa trajectoire est circulaire de rayon r_{larg} et de centre 0.

6. Simplifier dans ce cas les expressions de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ pour obtenir celles du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_R$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{a}_R$ de la sonde Rosetta.(1)
7. Déterminer la vitesse angulaire ω_R de la sonde Rosetta en fonction de G ,m_{com} et r_{larg}.(2)
8. En déduire la période T de son mouvement en fonction de G ,m_{com} et r_{larg}, puis estimer sa valeur numérique.(2)

2.3 Mise en orbite de Rosetta

On considère dans ce paragraphe que Rosetta possède une vitesse v_ℓ rectiligne porté par la droite Δ lorsqu'elle se situe à grande distance de la comète.
La plus petite distance entre la droite et la comète est notée b.

9. Donner la forme de son énergie mécanique losque la sonde s'approche de la comète. (1)
10. Exprimer son énergie potentielle effective et discuter de la nature de la trajectoire. Comment satelliser Rosetta ?(3)
11. Donner le lien entre la vitesse v' de la sonde lorqu'elle atteint son orbite et v_ℓ (2).
12. Exprimer v' en fonction de b, r_{larg} et v_ℓ. (2)

2.4 Mouvement de Philae

On s'intéresse maintenant au mouvement de l'atterrisseur Philae, et on considère que sa chute s'effectue avec un angle polaire θ constant.

13. Donner les expressions de $\overrightarrow{v_p}$ et $\overrightarrow{a}_p$ respectivement vitesse et accélération de Philae.(1)
14. Comparer la force exercée par Philae sur la comète et la force exercée par la comète sur Philae.(0.5)
15. Déterminer l'équation différentielle d'évolution de la position de Philae, lors de sa chute vers la comète. (1)
16. Montrer, à partir de l'équation différentielle d'évolution de la position, que
$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{Gm_{com}}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{Gm_{com}}{r_{larg}}$$
    avec v_0 la vitesse initiale verticale.(1)
17. En déduire la vitesse v_c de Philae au moment du contact avec le sol de la comète, que l'on considère situé à la distance r_{com} de son centre.(2)

Correction :

1. Masse de la comète : $m_{com} = \mu_{com}\frac{4}{3}\pi r_{com}^3$ soit
$$r_{com} = \left(\frac{3m_{com}}{4\pi\mu_{com}}\right)^{1/3} = 1,8\,km$$

2. $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$

3. $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

4. $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

5. Le mouvement est circulaire donc :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} &= r_{larg}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{v} &= r_{larg}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{a}_R &= -r_{larg}\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + r_{larg}\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

6. On utilise le PFD :
$$\begin{aligned}m_{Ros}\overrightarrow{a}_R &= -\frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r_{larg}^2}\overrightarrow{u_r}\\ r_{larg}\omega_R^2 &= \frac{Gm_{com}}{r_{larg}^2} \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{Gm_{com}}{r_{larg}^3}}\end{aligned}$$

7. La vitesse angulaire ω_R est constante donc $T = \frac{2\pi}{\omega_R} = 8,2 \times 10^5$ s= 5 jours.

8. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de Rosetta. On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.
$$\begin{aligned}Ec &= \frac{1}{2}m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta})^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)\\ Ep &= -\frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r}\\ Em &= \frac{1}{2}m_{Ros}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r}\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}Ep_{eff} &= \frac{1}{2}m_{Ros}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r}\\ \text{Conservation du moment cinétique : } L_z &= m_{Ros}r^2\dot{\theta} = m_{Ros}C\\ Ep_{eff} &= \frac{m_{Ros}C^2}{2r^2} - \frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r}\end{aligned}$$

Toutes les forces étant conservatives, l'énergie mécanique se conserve et $E_m = \frac{1}{2}m_{Ros}v_\ell^2 > 0$ la sonde est donc libre (état de diffusion), il faut la ralentir pour la mettre en orbite.

10. On utilise la conservation de l'énergie mécanique :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_{Ros}v_\ell^2 &= \frac{1}{2}m_{Ros}v'^2 - \frac{Gm_{com}m_{Ros}}{r_{larg}}\\ v_\ell^2 &= v'^2 - \frac{2Gm_{com}}{r_{larg}}\end{aligned}$$

11. On utilise la conservation du moment cinétique entre l'infini et l'orbite :
$$\begin{aligned}L_{z,\infty} &= L_{z,rlarg}\\ bv_\ell &= r_{larg}v'\\ v' &= \frac{bv_\ell}{r_{larg}}\end{aligned}$$

12. Système Philae : $\theta = cste$ donc $\overrightarrow{v}_p = \dot{r}\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{a}_p = \ddot{r}\overrightarrow{u_r}$

13. Principe des actions réciproques : $\overrightarrow{F}_{P/c} = -\overrightarrow{F}_{c/P}$.

14. $\overrightarrow{F}_{c/P} = -\frac{Gm_{Ph}m_{com}}{r^2}\overrightarrow{u_r}$, le PFD donne :
$$\ddot{r} = -\frac{Gm_{com}}{r^2}$$

15. $$\ddot{r} + \frac{Gm_{com}}{r^2} = 0 \Rightarrow \dot{r}\ddot{r} + \dot{r}\frac{Gm_{com}}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{Gm_{com}}{r} = A_1$$
Or, à l'instant initial, $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{Gm_{com}}{r_{larg}} = A_1$ soit
$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{Gm_{com}}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{Gm_{com}}{r_{larg}}$$

16. On en déduit :
$$v_c = \sqrt{v_0^2 + 2Gm_{com}(\frac{1}{r_{com}} - \frac{1}{r_{larg}})} = 1,12m/s$$

3 Cristallographie : Alliage Fer/Titane (10 points)

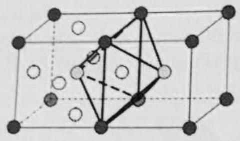
On considère une alliage de fer et de titane, de formule FeTi. Cet alliage cristallise dans une maille cubique simple, avec un atome de titane à chaque sommet du cube et un atome de fer au centre de la maille. Cette structure possède des interstices octaédriques : les sommets de ces octaèdres étant occupés par deux atomes de fer et quatre atomes de titane.
Données :

- paramètre de maille $a = 298\,\text{pm}$
- $M_H = 1,01\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$

1. Représenter deux mailles et situer les sites octaédriques (2).
2. Il est possible de former un alliage ternaire de FeTi avec l'hydrogène qui occupent les sites octaédriques de la maille. Donner la formule de la maille contenant le maximum d'atomes d'hydrogène. (3)
3. Donner le rayon maximal de l'hydrogène pouvant se glisser dans ces sites.(2)
4. Donner l'expression de la compacité de la structure. (2)
5. Ce maximum n'est en réalité jamais atteint, la formule de l'alliage le plus chargé en hydrogène est $FeTiH_{1,9}$. Exprimer la capacité volumique d'absorption d'hydrogène de cet alliage (quantité d'hydrogène), en kg d'hydrogène par mètre cube d'alliage métallique. (1)

Correction :

1. Les sites octaédriques sont situés au centre de chaque face, et appartiennent chacun à deux mailles adjacentes. On les représente ci-dessous dans deux mailles adjacentes.



En gris foncé, les atomes de titane aux sommets des cubes, en gris clair les atomes de fer au centre des cubes et en blanc les lacunes octaédriques de la maille de gauche, au centre des faces, avec un octaèdre représenté par les lignes en gras.

2. Chaque site octaédrique appartient à deux mailles, il compte donc pour ½ au sein d'une maille. Les sites sont au centre de chacune des faces, comme le cube comporte six faces, il y a $\times \frac{1}{2} = 3$ sites octaédriques par maille. Si tous les sites octaédriques sont occupés par un atome d'hydrogène, il y a donc dans la maille un atome de fer, $8 \times \frac{1}{8} = 1$, un atome de titane et trois atomes d'hydrogène. La formule de ce composé est alors $FeTiH_3$.

3. Le volume de la maille vaut $a^3 = (298 \times 10^{-12})^3 = 2{,}65 \times 10^{-29}\ \mathrm{m^{-3}}$.
Chaque maille contient 1,9 atome d'hydrogène, leur masse en kilogrammes vaut :

$$m = \frac{1{,}9 \times M_H \times 10^{-3}}{N_A} = \frac{1{,}9 \times 1{,}01 \times 10^{-3}}{6{,}02 \times 10^{23}} = 3{,}19 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}.$$

La capacité d'absorption vaut donc $\frac{3{,}19 \times 10^{-27}}{2{,}65 \times 10^{-29}} = 120\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

4 Une histoire de marins (17 points)

Clarisse et Jean sont dans un gros bateau. Arrivés près de l'île de Houat, ils décident de se rendre à terre. Malheureusement, la profondeur d'eau du port n'est pas assez grande pour accueillir leur bateau et les marins sont contraints de jeter l'ancre au large et de rejoindre le rivage sur un petit bateau gonflable appelé annexe.
Les deux boudins gonflables de l'annexe ont un diamètre de 40cm et une longueur de 1,5m .

Le gonflage s'effectue à l'aide d'une pompe à main de volume $V_p = 5\,\mathrm{L}$. La pression extérieure est noté P_0. La pression attendue dans l'annexe une fois gonflée est de $P_a = 2,5\,\mathrm{bar}$. L'air est assimilé à un gaz parfait et l'atmosphère comme un thermostat à la température $T = 25°\mathrm{C}$.
On note C_v la capacité thermique de l'air.

1. Déterminer le nombre de coups de pompes nécessaires pour gonfler l'annexe. Vous préciserez vos hypothèses.(3)

2. La valve permettant le gonflage de l'annexe, ne s'ouvre que lorsque la pression dans la pompe atteint la valeur $P_1 = 5\,\mathrm{bar}$ sous l'effet de la compression du piston. La transformation subie par le gaz dans la pompe le temps de la compression est supposée adiabatique.

   a) Définir adiabatique. Quelle autre système vu en cours permet de réaliser des transformations adiabatiques ? (1)

   b) Ce type de transformation est polytropique d'exposant γ, décrire la spécificité de cette transformation.(1)

   c) Calculer γ pour un gaz parfait diatomique à 5 degrés de liberté. (1)

   d) Donner la valeur du volume au moment de l'ouverture de la valve (juste avant), que vaut C_v ? (1)

   e) Calculer l'énergie minimale que doivent fournir les marins pour gonfler l'embarcation sans passer par le premier principe.(2)

   f) Vérifier ce résultat en passant par le calcul du travail des forces de pression et le premier principe. (2)

3. Une fois mis à l'eau, l'annexe se retrouve au contact de l'eau bretonne à $T = 15°\mathrm{C}$, quelles sont les conséquences pour l'embarcation ?(1)

   a) On considère que l'air à l'intérieur de l'annexe est à l'équilibre thermique avec l'océan, quelle est la pression dans l'annexe quand les marins touchent terre ? (2)

   b) Quel est le rôle joué par l'océan ? Faire un schéma et flécher les échanges thermiques.(1)

   c) Quel type de transformation s'est opérée ? En déduire la valeur du transfert thermique.(2)

Correction :

1. Soit n_a la quantité de matière nécessaire à gonfler l'annexe : $n_a = \frac{P_a V_a}{RT_0}$. La pompe continent $n_p = \frac{P_0 V_p}{RT_0}$ moles de gaz. Sachant que $V_a = 2\pi d^2/4 \times H = 0.5\,\mathrm{m}^3$ alors il faut 250 coups de pompe.

2. a) Une transformation adiabatique est une transformation sans échange d'énergie thermique avec l'extérieur. L'expérience de calorimétrie est adiabatique.

   b) $PV^\gamma = cst$

   c) $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 7/5$

   d) $P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma$ donc $V_1 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = 1.5\,\mathrm{L}$

   e) On écrit le premier principe : $\Delta U = W + Q$, $Q = 0$ car la transformation est adiabatique. Or $\Delta U = C_v \Delta T = C_v(\frac{P_1 V_1}{n_p R} - T_0)$ avec $C_v = \frac{n_p R}{\gamma - 1}$. Soit $\Delta U = 750\mathrm{J} = W$ donc l'énergie totale à fournir est $E = 250 \times W = 187,7\,\mathrm{kJ}$

   f) Le calcul donne $W = \frac{1}{\gamma-1}(P_1 V_1 - P_0 V_0) = 730\,\mathrm{J}$ Cohérent !

3. L'embarcation va subir un transfert thermique qui va faire varier sa pression interne...Si la pression baisse trop, les marins auront les fesses dans l'eau !

   a) $P_2 = \frac{naRT_2}{V_a} = 2,4\,\mathrm{bar}$

   b) L'océan est un thermostat

   c) Il s'agit d'une transformation monotherme.