Outils

Les Maths pour la Physique

1 Dérivées

Dans tout ce paragraphe, on notera f une fonction quelconque dérivable et continue définie sur un intervalle $\mathcal{I}$, on note x la variable de f.

1.1 Dérivée d'une fonction à une variable

La définition de la dérivée calculée au point x_0 est mathématiquement :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La première écriture de la dérivée peut s'interpréter comme : de combien évolue la fonction f lorsqu'on fait légèrement varier x de $dx = h$. Ceci s'exprime mathématiquement $df = f(x_0 + h) - f(x_0)$ soit $f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$. L'indice x_0 signifie que l'on regarde la fonction au niveau de la valeur x_0.
Tout ce que nous calculons pour l'instant sont des valeurs.

La deuxième forme de l'écriture donnée doit vous rappeler la formule de calcul de la pente d'une droite. Ainsi, la dérivée en x_0 s'interprète comme la valeur de la pente de la tangente à la courbe $f(x)$ au point x_0.

Au lieu de faire ce calcul pour chaque fonction, et autour de chaque point x_0 d'intérêt, les mathématiciens ont démontré que pour certaines fonctions connues f, il existait une autre fonction nommée f' telle que : $\forall x \in \mathcal{I}\ f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Utilisation en physique : En physique, on note souvent les petites variations d'une fonction df que l'on réécrit parfois : $df(x) = f'(x)dx$.
Lorsque l'on fait des approximations plus grossières, on écrit aussi : $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f$ et dans ce cas h n'est pas infiniment petit mais on considère que les expressions précédentes sont toujours valables. On approximera par exemple $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x)$.

Ceci peut se justifier en vous rappelant que les fonctions utilisées physique dans le cadre de la prépa sont quasiment toutes $\mathcal{C}^\infty$.

1.2 Dérivée partielle

Il existe des fonctions qui dépendent de plusieurs variables : par exemple l'énergie interne d'un système dépend de T, P, n... et se note $U(T, P, n..)$. Afin de donner des exemples les plus généraux possibles, nous considérerons une fonction f qui dépend de n variables notées $x_1, x_2, ..., x_n$.
La variation infinitésimale de f dépend donc de toutes ses variables :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n.$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x_1. En pratique, cela revient à dériver f par rapport à x_1 comme si toutes les autres variables étaient constantes. Pour revenir sur l'exemple de l'énergie interne :

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left.\frac{dU}{dT}\right|_{P,n,...}$$

Notez que les variables mises en indice des dérivées droites sont les variables considérées comme fixes.

Par ailleurs si f ne dépend que d'une seule variable alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}$.

1.3 Propriétés des fonctions

Quelques propriétés utiles :

1. Trouver un extremum local $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.
2. Distinguer un minimum local d'un maximum local : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ pour un minimum et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ pour un maximum.

1.4 Dérivées et primitives usuelles

Les dérivées :

Fonction	Dérivée
$\exp(ax)$	$a\exp(ax)$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
x^n	nx^{n-1}
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos x} = 1 + \tan^2 x$

Les primitives :

Fonctions	primitives
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$

Remarques utiles :

1. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
2. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
3. Toutes les autres racines (cubique...) fonctionnent comme la racine carrée : ce sont des puissances non entières.
4. Pour toutes les primitives non évidente il existe l'intégration par partie !

2 Approximations de fonctions

En physique nous utilisons énormément d'approximation de fonction autour d'un point caractéristique. Ceci rélève directement de ce que vous avez vu en maths : les développements limités, sauf que la physique se contente souvent des deux premiers ordres.

Fonction	approximation $x \longmapsto 0$
$\exp(ax)$	$1 + x$
$\ln(1+x)$	x
$\sin x$	x
$\tan x$	x
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x$

3 Produit scalaire et produit vectoriel

3.1 Le produit scalaire

Comme son non l'indique, son résultat est un scalaire, un nombre. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ faisant entre eux un angle α alors :

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = ||\overrightarrow{A}|| \times ||\overrightarrow{B}|| \cos\alpha$$

En physique, le vecteur $\overrightarrow{B}$ est souvent un vecteur de base unitaire eet le produit scalaire nous permet de projeter $\overrightarrow{A}$ sur $\overrightarrow{B}$. Le résultat de cette opération peut s'interpréter comme *de combien $\overrightarrow{A}$ fait avancer dans la direction et le sens de $\overrightarrow{B}$.*

3.2 Le produit vectoriel

Contrairement au produit scalaire, le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs est un **vecteur** orthogonal aux deux premiers.
Le calcul par composante du produit vectoriel se fait en exprimant chacun des vecteurs sous forme des ses coordonnées par rapport aux vecteurs de bases **dans le même ordre**. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'espace alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Méthode graphique :