TD : 1-Oscillateurs amortis

1 Applications directes du cours

App1 : Chute d'une masse reliée à un ressort

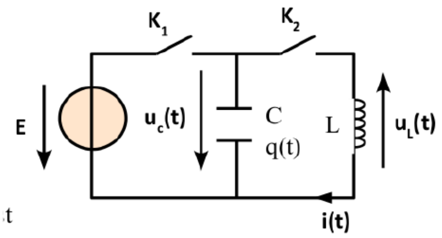
Une masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Elle est posée sur une planche, de telle sorte que la longueur l du ressort soit égale à l 0 , on prendra cette position de la masse comme origine de l'altitude. À $t = 0$, on retire la planche.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'altitude de la masse.
2. La résoudre.
3. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique.

App2 : Circuit RLC sans perte

On considère le circuit ci-contre : pour $t < 0$ l'interrupteur K1 est fermé et K2 est ouvert. À $t = 0$ on ouvre K1 et on ferme K2.

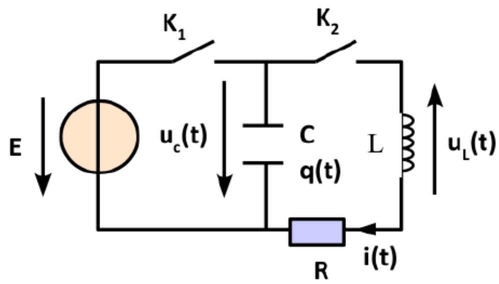
1. Pour $t = 0^+$ et $t = 0^-$ déterminer $u_c(t)$, $i(t)$ et $u_L(t)$.
2. Pour $t > 0$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ puis la résoudre.
3. Faire le bilan énergétique. Montrer que l'énergie dans le circuit est constante.
4. Déduire de la question précédente le portrait de phase de l'oscillateur associé à la variable $q(t)$.



App3 : Prise en compte de la résistance

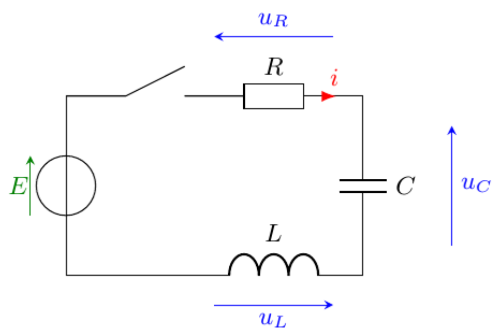
On considère le circuit ci-contre. $L = 10$ mH, $C = 0.1\mu$F. Pour $t < 0$ K1 est fermé et K2 est ouvert ; $t = 0$ on ferme K2 et on ouvre K1 .

1. Pour $t = 0^+$ et $t = 0^-$ déterminer $u_c(t)$, $i(t)$ et $u_L(t)$.
2. Pour $t > 0$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ en fonction du facteur de qualité et de la pulsation propre.
3. Déterminer la résistance critique R_C nécessaire pour que le système soit en régime critique. En déduite l'expression de $u_c(t)$ pour le régime critique et déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
4. On suppose $R = 80\Omega$. Le régime est pseudo-périodique, pourquoi ? Déterminer la pseudo-pulsation, le coefficient d'amortissement xi, $u_c(t)$ et un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
5. On suppose $R = 8000\Omega$. Le régime est apériodique, pourquoi ? Déterminer $u_c(t)$ et un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
6. Comparer suivant les valeurs de R les différentes durées du régime transitoire.



App4 : RLC Série

On branche en série un générateur de f.e.m. E, un interrupteur, un resistor de résistance R et, une bobine d'inductance L et un condensateur C initialement déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
Déterminer l'évolution temporelle de la tension $u_c(t)$.

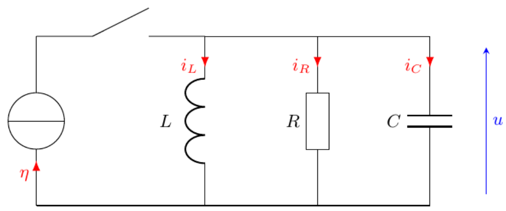


2 Exercices

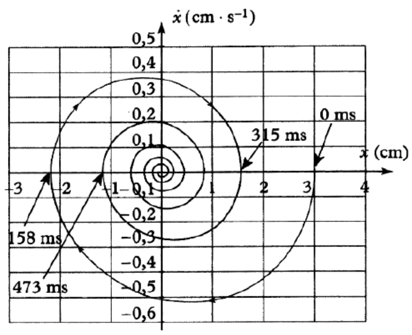
EX1 : RLC parallèle

Soit un circuit RLC comprenant une source de courant de c.e.m η, un condensateur de capacité $C = 1,0.10^{-9}$ F, une bobine d'inductance $L = 1,0.10^{-3}$ H, et un résistor de résistance $R = 100\Omega$ en parallèle. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

Déterminer l'évolution temporelle de la tension $u(t)$, ainsi que des trois courants $i_L(t)$, $i_R(t)$ et $i_C(t)$.



EX2 : Détermination des paramètres d'un ressort



On considère le portrait de phase d'un oscillateur amorti composé d'une masse m = 500g soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse de la masse m et x est l'écart à la position d'équilibre).
L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

1. Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.
2. Déterminer par lecture graphique :
   - la valeur initiale de la position x_0 ;
   - la valeur finale de la position x_f ;
   - la pseudo-période T_a ;
   - Le décrément logarithmique $D = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_a)}\right)$
3. En déduire le facteur de qualité Q de l'oscillateur, sa période pulsation propre ω_0 , la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ Faire l'application numérique.

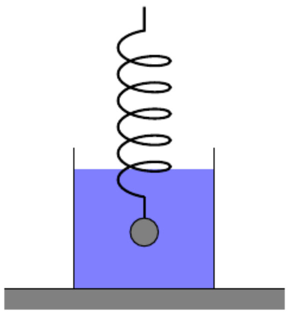
EX3 : Mécanique : Détermination d'un coefficient de viscosité

Un sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes :

$$\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la sphère.

1. Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T .
2. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0 . Déterminer le coefficients de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.



3 Problème

Pb1 : Mécanique : Suspension d'un véhicule

On considère un véhicule de masse m. Le système de suspension de ce véhicule peut être représenté par l'association d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , et d'un amortisseur provoquant une force de frottement de type fluide $f = -\lambda v$.
Toute autre source de frottements est négligée. On considère que la route est à l'abscisse $x = 0$.

1. Faire trois schémas : l'un pour le système à vide à l'équilibre, le deuxième pour le système à l'équilibre et le troisième pour le système à un instant quelconque.
2. On néglige le poids du système de suspension et des roues. Déterminer la relation entre la longueur à vide et la longueur d'équilibre du ressort du système.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement vertical du véhicule lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.
4. Déterminer le coefficient λ pour que le régime d'amortissement soit critique.
5. L'usure des amortisseurs due au temps entraîne une diminution du coefficient λ d'un cinquième de sa valeur initiale : $\lambda' = \lambda(1 - 1/5)$. Qualifier le régime d'amortissement dans ce cas.
6. Un trou dans la chaussée écarte le ressort de sa position d'équilibre d'une longueur h_0 . En considérant que la vitesse verticale est nulle en h_0 , résoudre l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement vertical du véhicule.
7. Déterminer le temps nécessaire pour que les oscillations du véhicule deviennent négligeables.

Applications numériques : $m = 800\,\text{kg}$; k = 31000 N/m ; $l_0 = 50$cm. On considérera les oscillations du véhicule négligeables lorsque leur amplitude maximale est divisée par un facteur e^{10}.