TD : 1-Oscillateurs amortis

1 Applications directes du cours

App1 : Chute d'une masse reliée à un ressort

Voir cours oscillateur harmonique

App2 : Circuit RLC sans perte

1. Pour $t = 0^-$ Le condensateur est chargé par un générateur de f.e.m. E donc $u_c(o^-) = E$. La seconde branche est ouverte : $i(0^-) = 0$ et $u_L(0^-) = 0$.
   Pour $t = 0^+$ on bascule K 1 et K 2, La tension aux bornes d'un condensateur est continue donc $u_c(o^+) = E$; Le courant circulant dans une bobine est continu donc $i(0+) = 0$. La loi des mailles nous permet de dire que $u_L = -u_c = -E$.

2. On applique la loi des mailles dans la maille de droite et on utilise les relations courant/tension des dipoles pour obtenir $\frac{du_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$.
   On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique, qui admet comme solution $u_c = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la pulsation propre, A et B deux constante d'intégration à déterminer grâce aux conditions initiales. On trouve alors $A = E$ et $B = 0$.

3. Le bilan s'obtient en multipliant la loi des mailles par le courant :
   $$0 = u_L i + u_c i = u_c C\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt}i = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2) = \frac{dE}{dt}$$
   Le bilan de puissance montre que la puissance cédée par un composant est intégralement récupérée par l'autre P c + P b = 0 alors l'énergie se conserve nécessairement.

4. L'énergie se conserve, on a un oscillateur harmonique. Le portrait de phase représente une ellipse (à montrer en remplaçant u_c et i par leurs évolutions temporelles.

App3 : Prise en compte de la résistance

1. Conditions identiques à l'application 2

2. L'application de la loi des mailles donne : $\frac{du_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$ ce qui se réécrit : $\frac{du_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3. Le système est en régime critique si $Q = 1/2$ alors $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 600\Omega$.

En régime critique, la solution de l'équation différentielle prend la forme $u_C(t) = (A + Bt)e^{r_0 t} + S_p = (A + Bt)e^{-t/\tau} + S_p$ avec A et B des constantes d'intégration, S_p une solution particulière de l'EDL2 avec 2nd membre et r_0 la racine du polynôme caractéristique associé à l'EDL2. Ce polynôme caractérsitque s'écrit

$$r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant est nul (régime critique) et sa solution est donc $r_0 = -\omega_0 = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$ alors le temps caractéristique d'amortissement peut s'écrire ici

$$\tau = \sqrt{LC}$$

4. La nouvelle résistance est inférieure à la précédente, donc le facteur de qualité augmente $Q \simeq \sqrt{10} > 1/2$.

On a comme polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ de discrimant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$, les racines de ce polynôme sont $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}\right)$. Ainsi les solutions de l'EDL2 sont de la forme

$$u_C(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} + S_p = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(Ae^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + Be^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t}\right) + S_p$$

Cette forme peut également s'écrire avec des cosinus/sinus d'argument la pseudo–pulsation $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1}{2}\left(4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}\right) \simeq 3 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, le coefficient d'amortissement ξ est définit tel que $2\xi = 1/Q \simeq 0.3\,\mathrm{SI}$ et le régime transitoire est associé au temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \simeq 2.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$.

5. R augmente, le facteur de qualité diminue et donc le régime est apériodique. Les racines du polynôme caractéristique sont $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}\right)$ et les solutions peuvent s'écrire

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{r_+ t} + B\mathrm{e}^{r_- t} + S_p$$

Il apparait deux temps caractéristique $\tau_\pm = -1/r_\pm$ de valeur $7.99 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$ et $1.25 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$: la seconde exponentielle tend très rapidement vers 0, la première va donc dominer la première pour les "temps long" et elle est associé à un temps caractéristique $\tau_+ = 1.25 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$.

6. D'après les observations des questions précédentes ; quand la résistance augmente, le temps d'amortissement diminue.

App4 : RLC Série

Voir cours

2 Exercices

EX1 : RLC parallèle

Loi des noeuds : $\eta = i_L + i_R + i_C = i_L + \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i_L + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$ car la tension u est la même aux bornes des quatre dipôles. Réécrivons cette EDL2 sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i_L}{LC} = \frac{\eta}{LC}$$

Cette EDL2 est associé au polynôme caractéristique

$$r^2 + \frac{r}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

De discriminant $\Delta = \frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC} = 10^{14} - 4.10^{12} > 0$, le régime est apériodique. Et les racines du polynôme caractéristique sont

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

La solution de l'EDL2 s'écrit

$$i_L(t) = A\mathrm{e}^{r_+ t} + B\mathrm{e}^{r_- t} + S_p$$

avec $S_p = \eta$ une solution particulière de l'équation avec 2nd membre. Pour déterminer A et B il faut utiliser les CI : le courant traversant une bobine est continu donc $i_L(0) = 0$, la tension aux bornes d'un condensateur est continue donc $u(0) = 0$ (et $u = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$)

$$A + B + \eta = 0$$
$$Ar_+ + Br_- = 0$$

Résoudre ce système conduit à

$$A = -\frac{\eta}{2}\frac{1 + RC\sqrt{\Delta}}{RC\sqrt{\Delta}} \; ; \; B = \frac{\eta}{2}\frac{1 - RC\sqrt{\Delta}}{RC\sqrt{\Delta}}$$

Les autres grandeurs électriques se déterminent par

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}(t) = LAr_+\mathrm{e}^{r_+ t} + LBr_-\mathrm{e}^{r_- t}$$
$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{LAr_+}{R}\mathrm{e}^{r_+ t} + \frac{LBr_-}{R}\mathrm{e}^{r_- t}$$
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = CLA(r_+)^2\mathrm{e}^{r_+ t} + CLB(r_-)^2\mathrm{e}^{r_- t}$$

EX2 : Détermination des paramètres d'un ressort

1. Régime pseudo–périodique, car les valeurs de positions et vitesses $(x, \dot{x})$ oscillent autour de (0, 0).
2. $x_0 = 3\,\mathrm{cm}$, $x_f = 0$;$T_a = 315$ ms ; $D = \ln 3/1.5 = \ln 2$

3.

Réponse très qualitative : On a montré dans le cours que $Q = \dfrac{\tau\Omega}{2}$ avec τ le taux d'amortissement et Ω la pseudo–pulsation. Le nombre d'oscillations observée avant d'atteindre le régime permanent est $N = (5\tau)F = \dfrac{5\tau\Omega}{2\pi}$ donc $Q = N\dfrac{\pi}{5} \sim N \sim 5$.

Réponse quantitative : La pseudo–pulsation est $\Omega = \dfrac{2\pi}{T_a} \simeq 19.9\,\mathrm{s}^{-1}$.

On sait (d'après le cours) que les solutions en régime pseudo–périodique peuvent s'écrire

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\mathrm{e}^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + B\mathrm{e}^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t}\right)$$

avec $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$. On identifie la pseudo–pulsation à $\Omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

De plus $D = \ln\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\mathrm{e}^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + B\mathrm{e}^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t}\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T_a)}\left(A\mathrm{e}^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+T_a)} + B\mathrm{e}^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+T_a)}\right)} = \ln\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T_a)}}$ car T_a est la période des exponentielles complexes.

Alors

$$D = \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t + \frac{\omega_0}{2Q}(t+T_a)}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\omega_0}{2Q}T_a}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T_a$$

Alors

$$\Omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$
$$\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{D}{T_a}$$

Ce qui conduit après quelques calculs à

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{T_a\Omega}{D}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{D}\right)^2} \simeq 4.5$$
$$\omega_0 = 2Q\frac{D}{T_a} = \frac{D}{T_a}\sqrt{1 + \left(\frac{T_a\Omega}{D}\right)^2} = \frac{D}{T_a}\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{D}\right)^2} \simeq 20.1\,\mathrm{s}^{-1}$$

Et par définition (toujours en se rappelant l'écriture de l'EDL d'un tel système), on peut écrire $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ donc

$$\lambda = m\frac{\omega_0}{Q} \simeq 2.22\,\mathrm{kg\,s}^{-1}\ ;\ k = m\omega_0^2 = 200\,\mathrm{kg\,s}^{-2}$$

EX3 : Mécanique : Détermination d'un coefficient de viscosité

1. Système : sphère, référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces (poids, rappel élastique, frottement visqueux). Soit $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire portant l'axe des hauteurs et orienté vers le bas. On applique le PFD projeté sur $\overrightarrow{e_z}$.

$$m\ddot{z} = mg - kz - 6\pi\eta r\dot{z} \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g$$

On considère que le régime est pseudo–périodique alors les solutions du polynôme caractéristique associé à l'EDL précédente sont

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} \pm j\sqrt{-\Delta}\right)\ ;\ \Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

Connaissant l'allure des solutions $z(t) = A\mathrm{e}^{r_+t} + B\mathrm{e}^{r_-t} + S_p$ on peut identifier la pseudo–pulsation

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2}}$$

2. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficients de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

3 Problème

Pb1 : Mécanique : Suspension d'un véhicule

On considère un véhicule de masse m. Le système de suspension de ce véhicule peut être représenté par l'association d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , et d'un amortisseur provoquant une force de frottement de type fluide $f = -\lambda v$.
Toute autre source de frottements est négligée. On considère que la route est à l'abscisse $x = 0$.

1. Faire trois schémas : l'un pour le système à vide à l'équilibre, le deuxième pour le système à l'équilibre et le troisième pour le système à un instant quelconque.

2. On néglige le poids du système de suspension et des roues. Déterminer la relation entre la longueur à vide et la longueur d'équilibre du ressort du système.

3. Établir l'équation différentielle du mouvement vertical du véhicule lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.

4. Déterminer le coefficient λ pour que le régime d'amortissement soit critique.

5. L'usure des amortisseurs due au temps entraîne une diminution du coefficient λ d'un cinquième de sa valeur initiale : $\lambda' = \lambda(1 - 1/5)$. Qualifier le régime d'amortissement dans ce cas.

6. Un trou dans la chaussée écarte le ressort de sa position d'équilibre d'une longueur h_0 . En considérant que la vitesse verticale est nulle en h_0 , résoudre l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement vertical du véhicule.

7. Déterminer le temps nécessaire pour que les oscillations du véhicule deviennent négligeables.

Applications numériques : $m = 800\,\text{kg}$; k = 31000 N/m ; $l_0 = 50$cm. On considérera les oscillations du véhicule négligeables lorsque leur amplitude maximale est divisée par un facteur e^{10}.