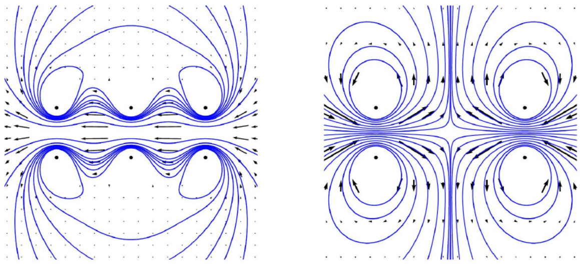
TD : Champ Magnétique

1 Applications directes du cours

App1 : Cartes de champ magnétique

Les champs magnétiques représentés par les cartes ci-dessous sont obtenus avec des courants électriques (pas d'aimants). Dans les deux cas, indiquer la position des sources, le sens du courant, les zones de champ fort et faible, et le cas échéant s'il existe une zone de l'espace où le champ magnétique est uniforme.



Correction :

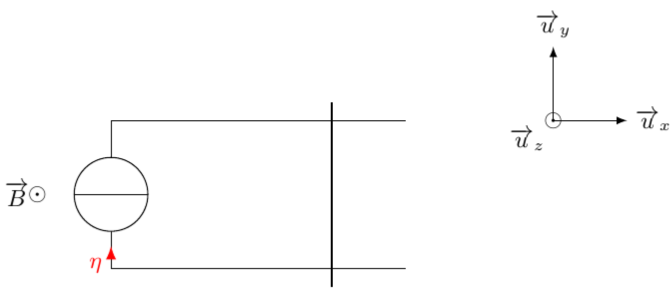
Les lignes de champ s'enroulent autour des sources, qui sont donc situées au niveau des points noirs de chaque figure. Il y en a six sur la figure de gauche et quatre sur la figure de droite.
Connaissant l'enroulement des lignes de champ, le sens du courant dans les fils se déduit de la règle de la main droite (l'enroulement des doigts donne le sens des lignes de champ, le pouce donne le sens du courant). Dans tous les cas, le courant est perpendiculaire au plan de la feuille. Raisonnons dans le cas où la feuille est posée sur votre table. Sur la carte de gauche, le courant va du sol vers le plafond pour les trois sources du bas et du plafond vers le sol pour les trois sources du haut. C'est le contraire sur la carte de droite : le courant va du sol vers le plafond pour les deux sources du haut et du plafond vers le sol pour les deux sources du bas.
. Les zones de champ fort sont celles où les lignes de champ sont très rapprochées, les zones de champ faible celles où il y a peu de lignes de champ.
. Une zone de champ uniforme se traduit par des lignes de champ parallèles et régulièrement espacées : il n'y en a sur aucune des deux cartes.

App2 : Champ dans un solénoïde

Déterminer le champ magnétique dans un solénoïde de 500 spires, de longueur 10,0cm, de diamètre 10,0mm et parcouru par un courant de 1,00A.

App3 : Rail de Laplace

Soit deux rails conducteurs parallèles séparés d'une distance l et raccordés à un générateur de courant de c.e.m. η, le tout fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On ferme le circuit en déposant une tige conductrice de masse m et de longueur l sur les rails et libre de se déplacer sans frottement. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ perpendiculaire au circuit.



1. Établir l'équation du mouvement de la barre. Résoudre l'équation en supposant que le générateur délivre une intensité constante et que la vitesse initiale de la barre est nulle.
2. Déterminer la puissance des actions de Laplace s'exerçant sur la tige mobile.
3. Vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 1 en appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur la barre.

Correction :

1. Système : barre mobile, référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : poids compensé par la réaction du support, frottements négligés, force de Laplace

$$\overrightarrow{F_L} = \eta\,\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B} = \eta l(-\overrightarrow{u}_y) \wedge B\overrightarrow{u}_z = -\eta l B\overrightarrow{u}_x\ .$$

Alors, le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $\overrightarrow{u}_x$ s'écrit

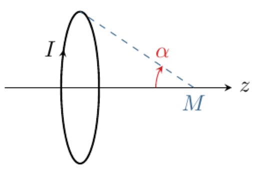
$$m\ddot{x} = -\eta l B \Rightarrow v = -\frac{\eta l B}{m}t \Rightarrow x = -\frac{\eta l B}{2m}t^2 + x_0\ .$$

2. $\mathcal{P} = \overrightarrow{F_L}\cdot\overrightarrow{v} = -\eta l B\overrightarrow{u}_x \cdot v\overrightarrow{u}_x = \dfrac{\eta^2 l^2 B^2}{m}t.$

3. $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} \Rightarrow m v\dot{v} = -\eta l B v \Rightarrow \ddot{x} = -\dfrac{\eta B l}{m}.$

2 Exercices

EX1 : Champ généré par une spire de courant



Le champ créé par une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I peut se calculer analytiquement. En un point M de cote z appartenant à l'axe de la spire, il prend la forme particulièrement simple :

$$\overrightarrow{B}(M) = \pm\mu_0\frac{I}{2R}\sin^3\alpha\overrightarrow{u_z}$$

où α est l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M .

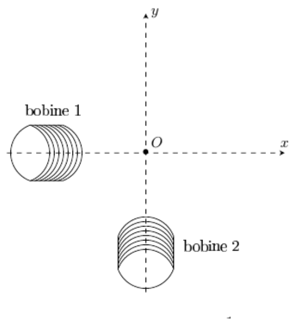
1. Dans quel sens est orienté le champ $\overrightarrow{B}$ en M ? En déduire le signe $\pm$ à conserver dans l'expression de B(M).
2. Exprimer le moment magnétique $\overrightarrow{m}$ de la spire.
3. Montrer que lorsque le point M est très éloigné de la spire ($z \gg R$), le champ sur l'axe s'exprime directement en fonction du moment magnétique $\overrightarrow{m}$ sans faire intervenir ni l'intensité I ni le rayon R.

Correction :

1. À « l'intérieur » de la spire et a fortiori sur l'axe le sens du champ magnétique se déduit de la règle de la main droite : la courbure des doigts indique le sens du courant et le pouce la direction du champ magnétique. Le champ est porté par $-\overrightarrow{u_z}$.
2. $\overrightarrow{m} = -IS\overrightarrow{u_z} = -\pi I R^2\overrightarrow{u_z}$
3. Exprimons $\overrightarrow{B}$ en fonction de R et z. Géométriquement, $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \approx \frac{R}{z}$ donc $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3}\overrightarrow{m}$

EX2 : Champ tournant

Les deux bobines représentées ci–contre ont même rayon, même hauteur et même nombre de spires. Elles sont parcourues par des courants $i_1 = I_m \cos(\omega t)$ et $i_2 = I_m \sin(\omega t)$. Le champ créé par chacun des bobines en O a pour expression $\overrightarrow{B} = Ki\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la bobine.

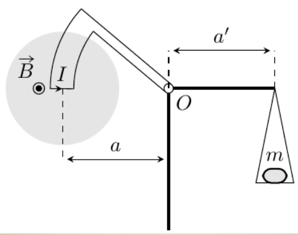


1. Quel est le déphasage entre les deux courants ?
2. Déterminer l'expression du champ magnétique créé en O.
3. Montrer que celui–ci a une norme constante et qu'il tourne à la vitesse angulaire ω. Préciser le sens de rotation.
4. On envisage un dispositif similaire utilisant trois bobines. Comment doit–on disposer les bobines et quel doivent être les déphasages entre les courants ?

Correction :

1. $\pi/2$
2. principe de superposition
3. norme = KI, vecteur tournant : $\overrightarrow{u_r} = \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$
4. Les bobines doivent être séparer d'un angle de $2\pi/3$ et déphasé de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres.

EX3 : Balance de Cotton



La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XXe siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O. La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O, reliés par une portion horizontale de longueur L. Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.
La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O. À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m, la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1. Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
2. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.
3. En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B, à exprimer en fonction de a, a' , L, I et de l'intensité de la pesanteur g.
4. La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0,05$ g, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25$ cm, $L = 5$ cm et I = 5 A. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

Correction : Introduisons des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe O_z telles que $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$.

1. Les parties circulaires ont pour centre O, si bien que l'élément de courant $Id\ell$ est porté par $\pm\overrightarrow{u_\theta}$ et la force de Laplace élémentaire $Id\ell \wedge \overrightarrow{B}$ par $\pm\overrightarrow{u_r}$. Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre O, dont le moment en O est donc nul.

2. Sur la partie rectiligne de longueur L, la force de Laplace vaut $\overrightarrow{F} = -IL\overrightarrow{u_r} \wedge B\overrightarrow{u_z} = ILB\overrightarrow{u_\theta}$. Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc a, d'où $\overrightarrow{M}_O = a\overrightarrow{u_r} \wedge ILB\overrightarrow{u_\theta} = aILB\overrightarrow{u_z}$
3. Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse m additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en O du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse m doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire : $-a'mg\overrightarrow{u_z} + aILB\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$ d'où $B = \frac{a'mg}{ILa}$.
4. La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle $m = \delta m$, c'est-à-dire $B = \frac{a'\delta mg}{ILa} = 2\,\text{mT}$ La balance de Cotton est utilisable pour les aimants classiques.

3 Problème

Pb1 : Mesure du champ magnétique terrestre

Dans un laboratoire situé à Paris, on souhaite déterminer la norme $||\overrightarrow{B_h}||$ de la composante horizontale locale B_h dont le sens et la direction sont donnés sur la figure 1.

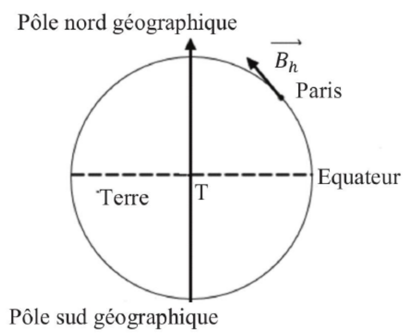


FIGURE 1 – Sens de la composante horizontale locale du champ magnétique terrestre à Paris.

Matériel disponible :
- une aiguille aimantée libre de pivoter sans frottement sur son axe, fixé à un socle transparent et un fil de cuivre relié à deux bornes de sécurité fixées au même socle transparent, de courant admissible 5 A.
- un rapporteur ;
- des fils électriques ; un interrupteur ;
- une alimentation électrique stabilisée 0 V-30 V/5 A
- un teslamètre à sonde de Hall biaxiale de gamme 0,1 mT à 100 mT.
- un ampèremètre ;

Données : le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I s'exprime, dans un système de coordonnées cylindriques d'axe z orienté par le sens réel du courant, par

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/ m . On admet que le champ créé par le fil du dispositif d'Ørsted est convenablement décrit par cette expression.

On souhaite établir un protocole permettant de mesurer la composante horizontale locale du champ

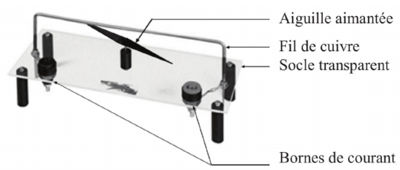


Figure 2 – **Dispositif d'Ørsted.**

magnétique terrestre à Paris en exploitant le principe de superposition des champs magnétostatiques.

1. Pour quelle raison ne peut-on pas se servir directement du teslamètre pour effecturer la mesure ?
2. On suppose que le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A. Calculer la valeur du champ magnétique à $r = 2$ cm du fil.
3. Décrire et schématiser l'expérience à réaliser en vous servant du matériel mis à votre disposition, exception faite du teslamètre.
4. Préciser les mesures à réaliser.
5. Donner un ordre de grandeur des grandeurs physiques à employer pour réaliser l'expérience.

Correction :

1. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 510^{-5} T, or le teslamètre ne permet pas de mesurer des champs inférieurs à $1 \cdot 10^{-4}$ T.
2. À partir de l'expression donnée, on trouve $B = 1 \cdot 10^{-5}$ T.
3. Placer le dispositif d'Ørsted selon une direction Nord-Sud, de telle sorte que l'aiguille soit parallèle au fil lorsqu'il n'est parcouru par aucun courant. Relier le fil d'Ørsted à l'interrupteur et à l'alimentation stabilisée de telle sorte qu'il puisse être alimenté par un courant constant. Placer le rapporteur de sorte à pouvoir mesurer la déviation de l'aiguille lorsque l'interrupteur est fermé, et inclure l'ampèremètre dans le circuit pour pouvoir mesurer l'intensité du courant.

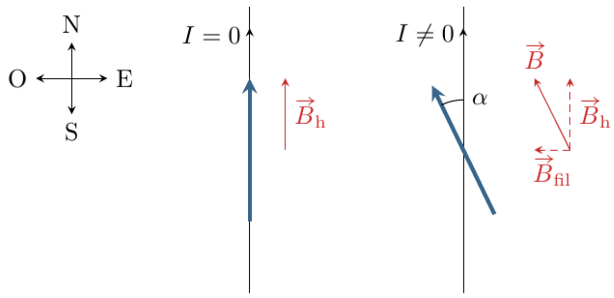


FIGURE 2 – Schéma de principe de l'expérience. Le sens de B_{fil} est obtenu à partir de la règle de la main droite, en raisonnant en vue de dessus avec l'aiguille aimantée placée en dessous du fil.

4. L'aiguille s'aligne sur le champ total, lui-même superposition du champ créé par le fil et du champ terrestre. Le dispositif est monté de telle sorte que les deux champs soient orthogonaux, si bien qu'on peut relier directement $\tan\alpha = \frac{B_{fil}}{B_h}$.
   En mesurant α pour différentes valeurs de I à partir desquelles on déduit B_{fil}, on peut alors obtenir B_h par une régression linéaire. Il faut par exemple représenter B_{fil} en fonction de $\tan\alpha$.
5. Compte tenu de l'expression donnée et pour une aiguille située 2 cm sous le fil, il faut avoir I = 5 A pour que $B_{fil} = B_h$.