TD : Cinématique

1 Applications de cours

App0 : Musculation vectorielle

On considère une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On lui superpose la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ et on note θ l'angle orienté de $\overrightarrow{u_x}$ vers $\overrightarrow{u_r}$.

1. Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l'angle θ.
2. Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.
3. Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique.
4. En dérivant $|\overrightarrow{u_r}|^2$, montrer que le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$.
5. Montrer par un calcul explicite de dérivée que $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$

App1 : Vecteur rotation de la Terre

Calculer, en seconde, la période de rotation de la Terre en prenant 24h comme durée du jour.
En déduire $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation de la Terre.
Dessiner sur un schéma le vecteur rotation de la Terre.

App2 : Course de voiture

Anaïde et Barnabé comparent les performances des voitures télécommandées que le Père Noël leur a apporté. La voiture d'Anatole a une accélération de $2ms^{-2}$ alors que celle de Barnabé accélère à $3ms^{-2}$, mais la voiture d'Anatole peut atteindre 12 km·h^1 alors que celle de Barnabé plafonne à 10 km·h^1.

1. Qui gagne la course dans l'allée du jardin, longue de 15 m ?
2. Grand prince, le gagnant accorde une revanche à son malheureux adversaire et lui laisse même choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr de gagner ?

App3 : Mouvement rectiligne

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ associé à un repère cartésien direct, un mobile ponctuel M se déplace le long d'un axe Δ passant par les points $A(D, 0, 0)$ et $B(0, D, 0)$. On note $\vec{u}$le vecteur directeur unitaire de l'axe Δ dirigé vers le haut. Le mobile part du point A à $t = 0$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\vec{u}$. Le mobile se déplace avec une accélération constante $\overrightarrow{a}$ orientée vers A, de norme a.

1. Justifier que la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$
2. Déterminer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de t.
3. Quelle est la condition sur a, v_0 et D pour que le mobile puisse atteindre B.

App4 : Trajectoire Hélicoïdale

Un mobile M décrit une trajectoire d'équations paramétriques (dans la base cartésienne) :

$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$
$$z(t) = \alpha t$$

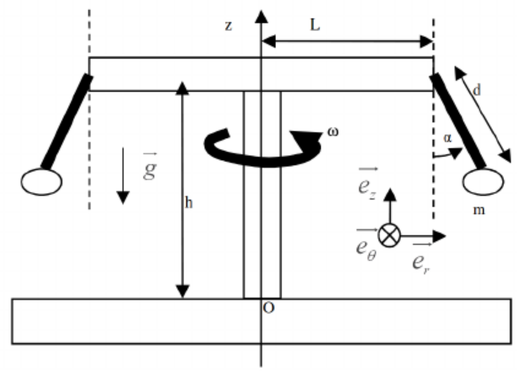
1. Donner la dimension de R, ω et α, qui sont des constantes réelles strictement positives.
2. Donner les équations paramétriques cylindriques du mouvement $(r(t); \omega(t); z(t))$.
3. Déterminer l'allure de la trajectoire.
4. Donner les expressions du vecteur vitesse dans les deux bases. Quelle est la norme de ce vecteur ?

2 Exercices

EX1 : Manège pendulaire

Un manège est constitué de bras horizontaux de longueur L, placés à une hauteur h au-dessus du plateau, auxquels sont liées des nacelles par une attache de longueur d et de masse négligeable. Les nacelles sont modélisées comme des points matériels de masse m. On note g l'intensité du champ de pesanteur.

Le manège est entraîné en rotation à une vitesse angulaire ! par rapport au référentiel terrestre. On considère dans toute la suite que cette vitesse angulaire est constante. La fixation permet aux nacelles de basculer dans un plan vertical contenant le bras suspenseur, l'attache faisant alors un angle α avec la verticale.



On utilise la base cylindrique d'axe Oz.

1. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans la base cylindrique, en fonction de h, L, d et α. En déduire l'expression générale de la vitesse $\overrightarrow{v(M)}_R$ en fonction de L, d, α, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta} = \omega$.
2. L'angle α et la vitesse angulaire ω sont maintenant supposés invariants. Quelle est alors la trajectoire décrite par la nacelle dans le référentiel terrestre ? Exprimer la vitesse puis l'accélération de la nacelle en fonction de L, d ; α et ω dans la base cylindrique d'axe (Oz).

EX2 : Mouvement Hélicoïdal dans le colimaçon du château d'Amboise

Dans le château d'Amboise, une immense rampe (plan incliné lisse) en colimaçon permettait aux cavaliers de passer du niveau de la Loire au plateau sur lequel est construit le château, sans mettre pied à terre.
Le chevalier Lancelot du Lac, monté sur son fier destrier, se déplace sur ce colimaçon selon une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques par $r = R$, $\theta = \omega t$ et $z = at$, avec ω, R, a constants.

1. Déterminer le pas h de l'hélice (hauteur parcourue lorsque θ parcourt 2π.
2. Déterminer les 3 vecteurs cinématiques en un point quelconque.
3. En déduire l'expression de la norme de v
4. Cherchez un anachronisme dans l'énoncé.

EX3 : Mouvements rectilignes simultanés

Mouvements rectilignes simultanés

Soit une voiture de largeur L en mouvement le long d'un trottoir rectiligne $x'x$. Un piéton décide de traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D (Fig. 14).

Le mouvement du piéton est rectiligne, uniforme, de vitesse $\vec{v}$, inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Oy.

a) La voiture se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u}_x$.

Quelle doit être la valeur de φ afin que la collision avec la voiture soit évitée, dans le cas d'une valeur minimale de la norme v de $\vec{v}$ (on précisera la valeur de v_{min}) ?

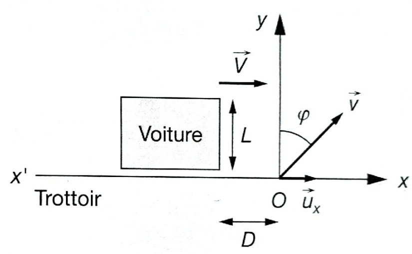


Figure 14

b) Reprendre la question précédente dans le cas où la voiture est en mouvement uniformément accéléré, d'accélération a_0 (la voiture ayant une vitesse nulle à la distance D du piéton).

EX4 : La face cachée de la Lune

Le référentiel géocentrique est caractérisé par trois directions fixes, définies par le centre de la Terre T et trois étoiles suffisamment éloignées pour que les considérer fixes soient une bonne approximation (on parle souvent de l'étoile polaire et de l'étoile Beta du Centaure, mais en pratique énormément d'étoiles sont suffisamment éloignées pour convenir). Dans ce référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. Les distance du centre de la Terre au centre de la Lune est environ égale à $D = 3,8 \cdot 10^5$ km

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, en distinguant notamment s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou d'un mouvement de rotation.
2. En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ du centre de la Lune sur sa trajectoire.
3. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel sélénocentrique, qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais suit le centre de la Lune.
5. Déterminer la vitesse angulaire Ω de rotation propre de la Lune, c'est-à-dire de la rotation de la Lune sur elle-même.

EX5 : Centrifugeuse à cosmonaute

Au cours de leur entraînement, pour habituer leur organisme à supporter les fortes accélérations lors du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur l en rotation à la vitesse angulaire ω.
Calculer ω en tour par minute sir $l = 5$ m et si l'accélération obtenue vaut $6g$.

EX6 : Chasseur et oiseau

Un oiseau se trouve sur une branche d'arbre, à une hauteur H au dessus du niveau du sol. Un chasseur se trouve sur le sol à une distance D du pied de l'arbre. Il vise l'oiseau et tire.
Au moment du coup de feu, l'oiseau, voyant la balle sortir du canon prend peur et se laisse tomber instantanément en chute libre. A chaque instant, l'accélération de la balle et de l'oiseau est $-g\vec{u_z}$.
L'oiseau est-il touché ? L'étude sera faîte :

1. dans le référentiel fixe du sol.
2. dans le référentiel lié à l'oiseau