TD : Cinématique

App1 : Course de voiture

Q1) Pour connaître le nom du gagnant, il faut déterminer les lois horaires donnant la position des deux voitures. Les deux mouvements sont du même type : après une première phase uniformément accélérée d'accélération a, le mouvement devient ensuite rectiligne uniforme à la vitesse v. Notons x la position d'une des voitures. Supposons par ailleurs que les voitures partent de $x = 0$ sans vitesse initiale. Dans la première phase,

$$\ddot{x} = a \text{ donc } x(t) = \frac{1}{2}at^2 + 0$$

Le temps τ au bout quel la voiture atteint sa vitesse limite v vaut $\tau = v/a$ et la position atteinte par la voiture vaut $x_0 = v^2/2a$. Numériquement, $x_{0,A} = 2,8\,\mathrm{m}$ et $x_{0,B} = 1,3\,\mathrm{m}$

Les deux voitures atteignent donc leur vitesse limite, et il faut étudier la seconde phase du mouvement. Dans cette seconde phase, $t > \tau$, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse maximale v que peut atteindre la voiture, donc :

$$\dot{x} = v \text{ et } x(t) = vt + C$$

La constante d'intégration C se trouve à partir de la condition initiale : $x(\tau) = \frac{v^2}{2a} \to C = -\frac{v^2}{2a}$. Finalement, on trouve la loi horaire « complète », mais valable seulement pour $t > \tau$, $x(t) = vt - \frac{v^2}{2a}$.

Le temps t_{arr} au bout duquel les voitures ont parcouru la longueur L de l'allée s'en déduit,

$$L = vt_{arr} - \frac{v^2}{2a} \text{D'où } t_{arr} = \frac{L}{v} + \frac{v^2}{2a}$$

C'est Anaïde qui gagne la course !

Q)2 Barnabé l'emporte si $t_{arr,B} < t_{arr,A}$:

$$\frac{L'}{v_B} + \frac{v_B^2}{2a_B} < \frac{L'}{v_A} + \frac{v_A^2}{2a_A}$$

Soit si $L' < \left(\frac{v_A}{2a_A} - \frac{v_B}{2a_B}\right) \frac{v_A v_B}{v_A - v_B} = 6,2\,\mathrm{m}$.

App3 : Mouvement rectiligne

Q1) Relation de Chales : $\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

Q2) $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{at^2}{2} + v_0 t\right)\vec{u}$

Q3) On note l la distance AM sur l'axe, il s'agit ici de retrouver la trajectoire. En remplaçant dans l'expression de la vitesse on trouve : $t = \frac{v_0 - v}{a}$. En remplaçant t dans l'expression de la position on trouve :

$$AM = l = -\frac{(v_0 - v)^2}{2a} + v_0\frac{v_0 - v}{a} = \frac{1}{a}(v - v_0)[\frac{1}{2}(v - v_0) + v_0] = \frac{1}{2a}(v - v_0)(v + v_0) \quad (1)$$

Soit : $v^2 - v_0^2 = 2al$. La distance $AB = \sqrt{D^2 + D^2} = \frac{D}{\sqrt{2}}$ ce qui donne : $v_B^2 = v_0^2 - 2\sqrt{2}aD$. Le mobile atteint B si $v_B^2 > 0$.

App4 : Trajectoire Hélicoïdale

1. R en mètre, ω en rad/s et α en rad.
2. $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \omega t$ et $z = \alpha t$.
3. Rotation de vitesse ω et de rayon constante (cercle) + translation de vitesse constante α le long de z : c'est une hélice (ou trajectoire hélicoïdale).

4. En base cartésienne : $\vec{v} = -R\omega \sin\omega t \vec{u_x} + -R\omega\cos\omega t\vec{u_x} + \alpha\vec{u_z}$

EX1 : Manège pendulaire

1. $\overrightarrow{OM} = h\vec{e_z} + L\vec{e_r} + d\sin\alpha\vec{e_r} - d\cos\alpha\vec{e_z}$.
   $v = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z} = d\dot{\alpha}\vec{e_r} + (L + d\sin\alpha)\omega\vec{e_\theta} + d\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{e_z}$
2. seule une composante de vitesse suivant $\vec{e_\theta}$ subsiste, le mouvement est donc circulaire. $\vec{a} = -(L + d\sin\alpha)\omega^2\vec{e_r}$

EX2 : Mouvement Hélicoïdal dans le colimaçon du château d'Amboise

Dans le château d'Amboise, une immense rampe (plan incliné lisse) en colimaçon permettait aux cavaliers de passer du niveau de la Loire au plateau sur lequel est construit le château, sans mettre pied à terre.
Le chevalier Lancelot du Lac, monté sur son fier destrier, se déplace sur ce colimaçon selon une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques par $r = R$, $\theta = \omega t$ et $z = at$, avec ω, R, a constants.

1. $h = aT = \frac{2\pi}{\omega}a$.
2. $\vec{v} = R\omega\vec{u_\theta} + a\vec{u_z}$

EX3 : Mouvements rectilignes

Soit (x_p, y_p) les coordonnées temporelles du piéton : $\begin{cases} x_p(t) = v\sin(\varphi)t \\ y_p(t) = v\cos(\varphi)t \end{cases}$
On note t_L le temps pour lequel $y_p = L \Longleftrightarrow t_L = \frac{L}{\cos\varphi}$.

De la même façon, on note (x_v, y_v) les coordonnées temporelles de la voiture : $\begin{cases} x_v(t) = Vt - D \\ y_p(t) = L \end{cases}$

Pas de choc si :

$$x_p(t_L) > x_v(t_L) \Longrightarrow L\tan\varphi > \frac{V}{v}\frac{L}{\cos\varphi} - D$$

à la limite : $v = \frac{VL}{L\sin(\varphi) + D\cos\varphi}$

Chercher le minimum de vitesse revient à dériver : on pose $g(\varphi) = L\sin(\varphi) + D\cos\varphi$ ce qui donne $\varphi_m = \frac{D}{L}$.
Soit

$$v_m = \frac{VL}{L\sin actan(L/D) + D\cos actan(L/D)}$$

EX4 : La face cachée de la lune

1. Représentons le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, figure 2. Pour représenter son mouvement, on utilise le fait que la face visible depuis la Terre est toujours la même. Ainsi, la Lune a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $(T, \vec{u_z})$

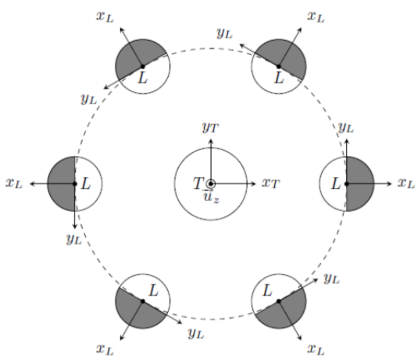


Fig. 2 – Mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique. La face cachée de la Lune est grisée.

2. La Lune effectue une révolution complète, c'est-à-dire une rotation de 2π en $\varDelta T = 27,3\,\text{jours}$. Sa vitesse angulaire de rotation vaut donc

$$\dot{\theta}_0 = \frac{2\pi}{\varDelta T} = 0.23 rad/j = 2,7 \cdot 10^{-6} rad/s$$

3. Le centre de la Lune a une trajectoire circulaire, parcourue à vitesse angulaire constante. L'analogue à la base polaire locale de centre T est ici la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. En traduisant les résultats établis en cours, on aboutit à $\overrightarrow{v}_{Lx} = D\dot{\theta}_0\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{v}_{Ly} = -D\dot{\theta}_0^2\overrightarrow{u_x}$
4. Dans le référentiel sélénocentrique, la Lune a un mouvement de rotation autour de l'axe $(L, \overrightarrow{u_z})$. On voit à partir du schéma que comme dans le référentiel géocentrique, elle fait un tour sur elle-même en 27,3 jours.
5. On en déduit que la vitesse $\overrightarrow{\varOmega}$ de rotation propre de la Lune sur elle-même est la même que la vitesse de rotation de la Lune autour de la Terre.

EX5 : Centrifugeuse à cosmonaute

Ici : $r = l$ et $\dot{\theta} = \omega = cste$ donc $\overrightarrow{v} = l\omega\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = -l\omega^2\overrightarrow{u_r}$

EX6 : Chasseur et oiseau

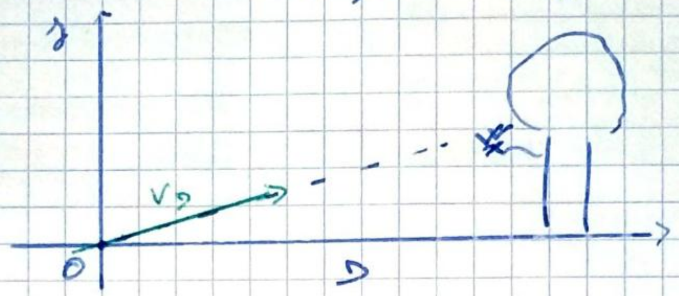
Correction de l'exercice de l'oiseau

a) référentiel fixe

Origine O = chasseur

Balle B : $\vec{OB}(0) = \vec{0}$ $\vec{v_B}(0) = \vec{v_0}$

oiseau W : $\vec{OW}(0) = H\vec{u_y} + D\vec{u_x}$



Balle : $\vec{a} = \vec{g}$

$\vec{v_B}(t) = \vec{g}t + v_B(0) = \vec{v_0} + \vec{g}(t)$

$\vec{OB}(t) = \vec{OB_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}gt^2$
0

oiseau : De même

$\vec{OW}(t) = \vec{OW_0} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

oiseau touché ? ssi $\exists\, t_1 > 0$ tq $\vec{OB}(t_1) = \vec{OW}(t_1)$

soit $\vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = \vec{OW_0} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

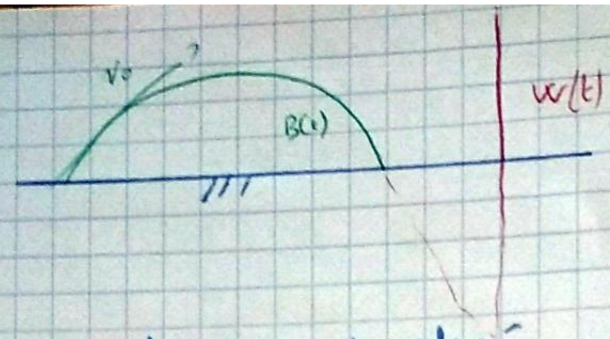
⚠ on travaille en vecteur

$\vec{v_0}t_1 = \vec{OW_0}$

Il faut que $\vec{v_0}$ = $\vec{OW_0}$ soient colinéaires de même sens. c'est justement le cas puisque le chasseur vise l'oiseau

Dans le référentiel de l'oiseau, c'est le même calcul mais W est immobile et l'accélération est de B est nul : B est en MRU, et l'oiseau est sur la trajectoire. Il est touché.

si :



l'oiseau n'est pas touché

t' : date à laquelle B touche le sol

oiseau touché si $t_R < t'$

A t', $\vec{OB}$ est horizontal donc $\perp \vec{u_y}$

$$\vec{u_y} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\vec{u_y} \cdot \left(\vec{v_0} t' + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right) = 0$$

$$v_{0y} t' - \frac{1}{2} g t'^2 = 0 \quad \text{car } \vec{g} = -g \vec{u_y}$$

$$\text{soit } t' = \frac{2 v_{0y}}{g}$$

$$\vec{v_0} t_R = \vec{OW_0} = D \vec{u_x} + H \vec{u_y}$$

$$\begin{cases} v_{0y} t_R = H \\ v_{0x} t_R = D \end{cases} : t_R = \frac{H}{v_{0y}} = \frac{D}{v_{0x}}$$

oiseau sauvé pour

$$t_R > t' : \frac{H}{v_{0y}} > \frac{2 v_{0y}}{g}$$

$$v_{0y}^2 < \frac{gH}{2}$$

$$v_{0y} < \sqrt{\frac{gH}{2}}$$

Condition entre v_0 et H

$$H < \frac{g \cdot OW_0^2}{2 V_0^2}$$