TD : Circuits linéaires

Correction

1 Applications directes du cours

App1 : Conditions initiales

Application de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de la continuité du courant dans une bobine.

1. Continuité du courant dans une bobine $i'(t=0^-) = i'(t=0^+) = 0$ par conséquent, dans l'autre branche on a $i'' = i$.
2. $i'(t=0^-) = i'(t=0^+) = 0$; $i = I_0$; $u' = L\frac{di'}{dt}$ et $u(0^+) = Ri$
3. $i'(t=0^-) = i'(t=0^+) = 0$; $u'' = E$; $i' = i$; $U_c = 0$ et $u' = R'i$
4. $U_c = U_c' = 0$ donc $U_R' = 0 \Longrightarrow i' = 0$ et $i'' = C\frac{dU_c}{dt}$; $i = E/R$

App2 : Charge d'un condensateur

1. Il s'agit d'un RC série alimenté par un échelon de tension
2. Voir cours
3. La courbe de tension donne : une pente à l'origine de $\frac{E}{RC}$, avec une asymptote donnant $E = 2,5\,\text{V}$
   La courbe en intensité donne $i(0) = 0,5\,\text{A}$ or $i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau) \Longrightarrow R = 5 \times 10^{-3}\,\Omega$
   La tangente à l'origine croise l'asymptote en $t = \tau = RC \Rightarrow C = 1 \times 10^{-8}\text{F}$

App3 : Réponse temporelle d'un circuit RC à un échelon de courant

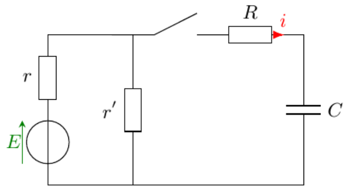
1. $\eta = i_R + i_C$ et la loi des mailles donne $U_c = U_R$ en appliquant la relation courant-tension du condensateur, on a : $\eta = \frac{U_R}{R} + C\frac{dU_c}{dt}$. Or pour un condensateur $CU_c = q$ donc en remplaçant on obtient $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \eta$
2. Pour $t < 0 \Rightarrow q = 0$ et $i_c = i_r = 0$ pour $t > 0$ on retrouve les solutions d'une équation différentielle $q(t) = A\exp(-t/\tau) + B$. On identifie les constantes à l'aide des conditions initiales : $B = RC\eta$ et $q(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$ donc $A = -RC\eta$

2 Exercices

EX1 : Réponse temporelle d'un circuit RC à un échelon de tension

1. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur est initialement déchargé donc $U_c(0) = 0$ alors r' et R sont en parallèle. L'intensité I sortant du générateur est $I = E/r$
   Un pont diviseur de courant donne $i = \frac{1/R}{1/r'+1/R}\frac{E}{r} = \frac{r'}{r'+R}\frac{E}{r}$.
   À $t = +\infty$ le condensateur est chargé et $i = 0$.

Le générateur est un générateur de tension E continue. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur est initialement déchargé.



2. Il faut d'abord simplifier le circuit :
   a) on passe le générateur en convention Norton, il devient une source de tension délivrant $\eta = E/r$ en parallèle d'une résistance r. On calcule alors la résistance équivalente à $R_e = r//r'$. $R_e = \frac{rr'}{r+r'}$.
   b) On repasse alors en convention Thévenin avec $E' = R_e\eta = \frac{rr'}{r+r'}E/r = \frac{r'}{r+r'}E$.
   c) On calcule ensuite $R_t = R_e + R = \frac{rr'}{r+r'} + R$ pour retrouver un circuit RC classique alimenté par un échelon de tension $E' = \frac{r'}{r+r'}E$

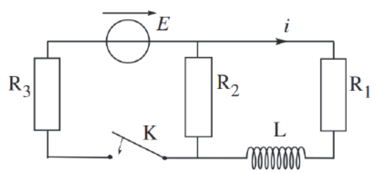
Il ne reste plus qu'à mettre l'ensemble en équation :

$$E' = U_{Re} + U_c$$
$$\text{Dérivation } 0 = \left(\frac{rr'}{r+r'} + R\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$
$$\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{C(rr' + R(r+r'))}i = 0$$

Soit $i(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau}) + B$ avec $\tau = \frac{C(rr'+R(r+r'))}{r+r'}$ et $A = \frac{r'}{r'+R}\frac{E}{r}$ et $B = 0$.

EX2 : Trois résistances et une bobine

1. On posera : $\tau = \frac{L(R_2+R_3)}{R1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$.
   a) Maille de droite : $0 = U_L + U_1 - U_2 = L\frac{di}{dt} + R_1i - R_2i'$.
   b) Maille de gauche : $E = R_2i' - R_3i_0$ avec $i_0 = i + i'$
   c) On combine les écriture de U_2 à l'aide des deux mailles : $E + R_3i_0 = R_2i' = L\frac{di}{dt} + R_1i$



$$E - R_3(i+i') = L\frac{di}{dt} + R_1i\text{or } R_3i' = \frac{R_3}{R2}U_2 = \frac{R_3}{R2}(U_L + R_1i)$$
$$L\frac{di}{dt} + (R_1 + R3)i = E - \frac{R_3}{R2}(U_L + R_1i)$$
$$L(1 + \frac{R_3}{R_2})\frac{di}{dt} + (R_1 + R3 + \frac{R_1R_3}{R_2})i = E$$
$$\tau\frac{di}{dt} + i = I$$

avec $I = \frac{R_2+R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}E$, en résolvant on trouve $i(t) = I(1 - \exp\frac{-t}{\tau}$.

2. On posera $\tau' = \frac{L}{R_1+R_2}$. On réécrit la loi des mailles : $U_L - U_2 + U_1 = 0$ avec $i = i'$.

$$L\frac{di}{dt} + R_1i = -R_2i$$
$$\frac{L}{R_1+R_2}\frac{di}{dt} + i = 0$$

Soit $i(t) = I\exp\frac{-t}{\tau'}$

calcul de l'énergie : $\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty}(R_1+R_2)i(t)^2dt = (R_1+R_2)I\int_0^{+\infty}\exp\frac{-2t}{\tau'}dt = \frac{R_1+R_2}{2}\tau'I^2 = \frac{1}{2}LI^2$

EX3 : Problème analogue : chute avec frottements.

À un instant initial $t = 0$, on lâche, sans vitesse initiale, une balle qu'on pourra assimiler à un point matériel M de masse m. Lors de sa chute, l'air exerce une force de frottement fluide proportionnelle à l'opposée de la vitesse de la balle : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

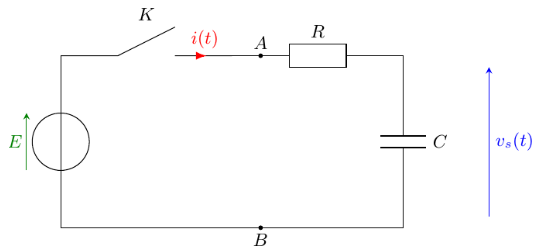
1. λ en kg/s.
2. Référentiel terrestre supposé galiléen, axe Oz descendant.
3. $\vec{p} = mg\overrightarrow{u_z}$ et force de frottement $\vec{f} = -\lambda v\overrightarrow{u_z}$
4. En projection sur $\overrightarrow{u_z}$: $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g$
5. $v(t) = \frac{mg}{\lambda}(1 - \exp -t/\tau)$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$
6. La bille atteint une vitesse limite.

EX4 : Réaction chimique d'ordre 1

1. $\frac{dC}{dt} + kC = 0$
2. $C(t) = \frac{n_0}{V}\exp -kt$

3 Problème : Études temporelles et énergétiques de la charge d'un condensateur (TSI 2005)

3.1 Charge d'un condensateur



Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On place aux bornes A,B un générateur de f.é.m constante E et un interrupteur K. Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit v_s la tension aux bornes du condensateur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

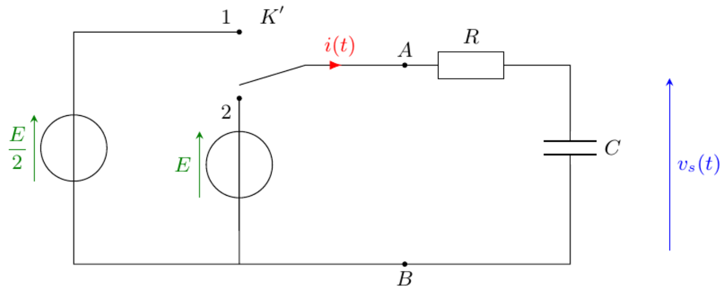
1. Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps tres long (infini) apres la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de vs et de l'intensité i dans le circuit au bout d'un temps tres long.
2. Etablir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$). Trouver a partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps tres long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question 1.
3. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction vs (t) en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe a $t = 0$.
4. Tracer la tangente a l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.
5. Déterminer, en fonction de τ , l'expression du temps t1 a partir duquel la charge du condensateur differe de moins de 1% de sa charge finale. On donne $ln100 = 4,6$.
6. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq$ (L'orientation de i(t) est précisée sur le schéma).

3.2 Étude énergétique de la charge du condensateur

1. Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_c$ emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C et de E.
2. Déterminer, a partir des résultats de la partie précédente, l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_j$ dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera $\mathcal{E}_j$ en fonction de C et de E.
3. Montrer, a partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie $\mathcal{E}_g$ fournie par le générateur au cours de la charge est égale a $\mathcal{E}_g = CE^2$. Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.
4. Définir et calculer le rendement énergétique ρ de la charge du condensateur par le générateur a travers une résistance non inductive.

3.3 Amélioration du dispositif

Afin d'améliorer le rendement de la charge du condensateur, on effectue celle-ci en deux étapes. On considere pour cela le montage suivant :



A la date $t = 0$, le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur K' dans la position 1 (phase 1). Lorsque la charge sous la tension $E/2$ est terminée, on bascule K' dans la position 2 (phase 2) et on procede a la charge du condensateur sous la tension E.

1. Quelle est l'énergie $\mathcal{E}_{g1}$ fournie par le générateur au cours de la premiere phase de charge ? Quelle est l'énergie $\mathcal{E}_{c1}$ emmagasinée par le condensateur au cours de la premiere phase de charge ?
2. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension v_s au cours de la deuxieme phase de charge ? En prenant pour origine des temps (t = 0) la date a laquelle on bascule l'interrupteur de la position 1 dans la position 2, déterminer l'expression de $v_s(t)$ en fonction du temps au cours de la deuxieme phase de charge.
3. En déduire, en fonction du temps, l'expression de l'intensité $i(t)$ qui traverse le circuit au cours de la deuxieme phase de charge.
4. En utilisant les expressions de v_s et de i en fonction du temps, déterminer :

   a) l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{g2}$ fournie par le générateur au cours de la deuxieme phase de charge en fonction de C et E ;

   b) l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{c2}$ emmagasinée par le condensateur au cours de la deuxieme phase de charge en fonction de C et E.
5. Calculer le rendement ρ' de la charge du condensateur lorsque cette derniere est effectuée en deux étapes.
6. Compte tenu des rendements obtenus lors de la charge du condensateur avec les deux méthodes précédentes, indiquer comment il faudrait procéder pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1. Aucun calcul n'est demandé dans cette question, juste une réponse argumentée.