

**Complément de TD de mécanique**

## 1 Potentiel de Lennard-Jones (19)

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes sont distants de  $r$ , l'énergie potentielle d'interaction peut-être décrite par le potentiel de Lennard-Jones :

$$E_p = \frac{-a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}} \quad (1)$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes positives.

1. On utilise le potentiel de Lennard-Jones pour modéliser une liaison covalente, en changeant la valeur des constantes, dans quel autre cas est-il utilisé ? (1)
2. Déterminer la force qui dérive de cette énergie. (3)
3. Déterminer la distance  $r_e$  à l'équilibre. Cette position d'équilibre est-elle stable ou instable ? (3)
4. On suppose dans cette question et dans la suivante que l'un des atomes est beaucoup plus lourd que l'autre et reste au repos. Tracer la courbe représentative de  $E_p(r)$  et discuter les différents mouvements possibles en fonction de l'énergie totale de la molécule. *Vous illustrerez votre propos à l'aide de la figure.* (4)
5. L'atome le plus léger a une masse  $m$ . Énoncer le théorème de l'énergie mécanique pour dans ce cas, on appelle  $E_0$  l'énergie mécanique initiale. (3)
6. En déduire une expression de la vitesse radiale  $\dot{r}$  et de l'accélération radiale. (2)
7. On se place en  $r$  très proche de  $r_e$  et on note  $r = r_e + \epsilon$  avec  $\epsilon$  négligeable devant  $r_e$ . Montrer que l'accélération radiale peut se mettre sous la forme : (1)

$$\ddot{\epsilon} = \frac{1}{m} \left( \frac{12b}{r_e^{13} \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^{13}} - \frac{6a}{r_e^7 \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^7} \right)$$

8. Simplifier l'expression sachant que pour  $\beta \ll 1$  alors  $(1 + \beta)^{-\alpha} \approx 1 - \alpha\beta$  (1).
9. Montrer que l'on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique et donner la période des petites oscillations. (1)

*Données :*  $\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{u}_z$

1. Le potentiel est très utilisé pour modéliser les interactions de van der Waals.
2.  $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{grad}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = \left(-\frac{6a}{r^7} + \frac{12b}{r^{13}}\right) \overrightarrow{u}_r$   
Rappel :  $(u^n)' = u' n u^{n-1}$
3. A l'équilibre on peut écrire  $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$  ou  $\frac{\partial E_p}{\partial r} = 0$  ce qui donne  $r_e = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$ . L'énergie potentielle correspondante est :  $E_p(r_e) = \frac{-a^2}{4b}$ .  
Pour trouver la position stable il fallait soit vérifier que  $\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2} > 0$  ou remarquer que  $E_p(r_e)$  est minimale. L'équilibre est forcément stable.
4. Voir le cours pour la courbe. Il fallait ensuite discuter : si  $E_m > 0$  alors les deux particules sont libres et il n'y a pas de liaison, la seule contrainte est pas d'interpénétration.  
Si  $E_m = E_p(r_e)$  la molécule est stable et immobile. Si  $0 > E_m > E_p(r_e)$  la distance entre les deux noyaux oscille entre deux positions.
5. Théorème de l'énergie mécanique : Les forces qui s'appliquent sur le système étant conservatives  $\Delta E_m = 0$  donc  $E_m = E_c + E_p = E_0$ .
6.  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$  donc  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}} = E_0$   
Deux choix pour obtenir l'accélération : soit repartir du PDF :  $m\ddot{r} = \left(-\frac{6a}{r^7} + \frac{12b}{r^{13}}\right)$  ;  
Soit utiliser la dérivée temporelle en écrivant que  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( E_0 + \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^{12}} \right) \frac{dr}{dt}$$

$$m \dot{r} \ddot{r} = \left( -\frac{6a}{r^7} + \frac{12b}{r^{13}} \right) \dot{r}$$

7. Autour du point d'équilibre  $\ddot{r} = \ddot{\epsilon}$ , il suffit donc de remplacer  $r$  par  $r_e + \epsilon$  puis de factoriser par  $r_e$ .

8. On obtient donc

$$\ddot{\epsilon} = \frac{1}{m} \left( \frac{12b}{r_e^{13} \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^{13}} - \frac{6a}{r_e^7 \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^7} \right) = \frac{1}{m} \left( \frac{12b}{r_e^{13}} \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^{-13} - \frac{6a}{r_e^7} \left(1 + \frac{\epsilon}{r_e}\right)^{-7} \right)$$

Il vient donc  $\ddot{\epsilon} = \frac{1}{m} \left( \frac{12b}{r_e^{13}} - \frac{6a}{r_e^7} - \frac{156b\epsilon}{r_e^{14}} - \frac{42a\epsilon}{r_e^8} \right)$  On remplace ensuite  $r_e$  par sa valeur et on trouve :  $\ddot{\epsilon} + \frac{1}{m} \left( \frac{a}{2b} \right)^{1/3} \frac{a^2}{b} 18\epsilon$ .

On retrouve bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{a}{2b} \right)^{1/3} \frac{a^2}{b} 18$ .

## 2 Partie II : Particules chargées dans l'atmosphère (extrait Centrale supélec PC 2018)

L'atmosphère terrestre comporte de nombreuses particules chargées. Certaines d'entre elles parviennent à haute énergie dans la haute atmosphère avant d'être guidées par le champ magnétique terrestre. Leur freinage à l'arrivée s'accompagne de phénomènes optiques spectaculaires, observables près des pôles magnétiques terrestres vers lesquelles ces particules sont guidées. D'autres particules chargées, moins énergétiques, dues à l'ionisation partielle des gaz de la haute atmosphère, influencent la propagation des ondes qui sont guidées entre la surface des océans et la haute ionosphère. C'est en particulier le cas des siffleurs ionosphériques, ondes radio fortement dispersées, générées par des sources naturelles, qui interagissent aisément avec les récepteurs radio en produisant un bruit caractéristique de sifflement, d'où leur nom. Ils ont été observés durant la première guerre mondiale puis clairement identifiés dès 1919.

### 2.1 Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique

On étudie d'abord le mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  sous la seule influence d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ . La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}_0 = v_\perp \vec{u}_x + v_\parallel \vec{u}_z$ .

**Question 1 :** Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  et  $v_z(t)$  de la vitesse  $v(t)$  de la particule. Que peut-on dire de  $v_z(t)$  et de  $\vec{v}^2(t)$  ?

On s'intéresse seulement au mouvement projeté dans un plan perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ ; la vitesse associée est notée  $\vec{w}(t)$ .

**Question 2 :** Déterminer l'équation vérifiée par  $\vec{w}(t)$

**Question 3 :** Montrer que le mouvement de la particule chargée ainsi projeté est circulaire, de rayon  $\rho_c$  à déterminer, parcouru à vitesse angulaire constante  $\Omega_c$  (algébrique) et déterminer  $\Omega_c$ .

**Question 4 :** Rappeler l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre (par exemple en France) et calculer  $\Omega_c$  respectivement pour des électrons et pour des protons.

#### 2.1.1 Particule chargée en mouvement dans des champs électrique et magnétique croisés

On étudie maintenant le mouvement de la particule de charge  $q$  et de masse  $m$  sous l'influence d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  et d'un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_x$ . La vitesse initiale est  $\vec{v}_0 = \vec{v}_\perp$  où  $\vec{v}_\perp \cdot \vec{u}_z = 0$ .

**Question 5 :** Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  et  $v_z(t)$  de la vitesse  $v(t)$  de la particule.

**Question 6 :** Montrer qu'il en existe une seule solution constante dans le plan (Oxy) perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  appelée vitesse de dérive  $V_d$  (par définition  $\vec{V}_d \cdot \vec{u}_z = 0$ ) et exprimer  $\vec{V}_d$  en fonction de  $E_1$  et de  $B_0$ .

On pose  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_d$ .

**Question 7 :** Quelles sont les équations différentielles vérifiées par  $\vec{u}(t)$  ? En déduire la trajectoire de la particule chargée.

**Correction :**

# Concours Centrale-Supélec PC 2018

## Epreuve écrite PHYSIQUE 1

Corrigé proposé par Gwénaél RAILLET : [raillet.gwenael@neuf.fr](mailto:raillet.gwenael@neuf.fr)  
Avec l'aide précieuse de Delphine PALACIO

### Océans, atmosphère et communications

#### I – Particules chargées dans l'atmosphère

##### I.A – Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique

**Q.1)** \* On applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à une particule de charge  $q$  soumise à la force de Lorentz magnétique seule (le poids est négligé) dans un référentiel supposé galiléen lié à l'atmosphère.

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \quad \text{qui donne en projection dans la base cartésienne : } \begin{cases} \dot{v}_x - \frac{qB_0}{m}v_y = 0 & (a) \\ \dot{v}_y + \frac{qB_0}{m}v_x = 0 & (b) \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

\* La troisième équation permet d'affirmer que  $v_z$  est une constante du mouvement.

\* Multiplions scalairement la 2<sup>ème</sup> loi de Newton par  $\vec{v}$  :  $m\vec{v}\dot{\vec{v}} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)\vec{v} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0$  donc  $v^2$  est une constante du mouvement.

**Q.2)**  $\vec{\omega} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} + v_z \vec{e}_z \rightarrow \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}$  puisque  $v_z = Cte$ . Et  $v_z \vec{e}_z \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$   
On réécrit donc l'équation vectorielle précédente :  $m\dot{\vec{\omega}} = q\vec{\omega} \wedge \vec{B}_0 \rightarrow d\vec{\omega} = \frac{q}{m} \vec{\omega} \wedge \vec{B}_0 dt$

**Q.3)** La preuve de la trajectoire circulaire est hors programme : « Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire » ( Extrait du programme de 1<sup>ère</sup> année)

On s'intéresse ici à la projection de la trajectoire dans le plan (Oxy).

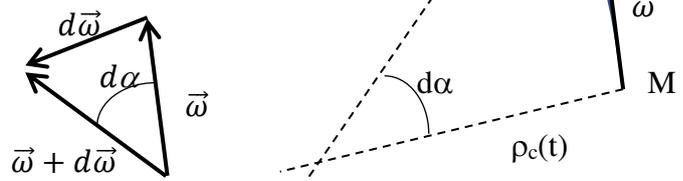
$\|\vec{\omega}\| = Cte$ . En effet,  $\vec{v}^2 = \vec{\omega}^2 + v_z^2 = Cte$  et  $v_z = Cte \rightarrow \vec{\omega}^2 = Cte$

D'où  $d\vec{\omega}^2 = \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = 0$

Géométriquement :  $d\alpha = \frac{MM'}{\rho_c(t)} = \frac{d\omega}{\omega}$

$\rightarrow d\alpha = \frac{\omega dt}{\rho_c(t)} = \frac{qB_0 dt}{m}$  d'après Q2.

D'où  $\rho_c = \frac{\omega}{\Omega_c} = Cte$  en posant  $\Omega_c = \frac{qB_0}{m}$



On remarque que  $\rho_c = Cte$  donc la projection du mouvement de la particule dans le plan (Oxy) est circulaire parcouru à la vitesse  $\omega$  et à la vitesse angulaire  $\Omega_c$ .

**Q.4)** L'ordre de grandeur du champ géomagnétique au voisinage de la surface terrestre est  $10^{-5}$  T.

On en déduit :  $\Omega_c \approx 10^6$  rad.s<sup>-1</sup> pour un électron et  $\Omega_c \approx 10^3$  rad.s<sup>-1</sup> pour un proton.

##### I.B – Particule chargée en mouvement dans les champs électrique et magnétique croisés

**Q.5)** On ajoute au bilan des forces de la question **Q.1** le terme électrique de la force de Lorentz :  $q \cdot \vec{E}_1$ .

Le système d'équation différentielles devient :

$$\begin{cases} \dot{v}_x - \Omega_c v_y = \frac{qE_1}{m} & (a) \\ \dot{v}_y + \Omega_c v_x = 0 & (b) \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

**Q.6)** La solution constante dans le plan (Oxy) correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dans ce plan donc  $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$ .

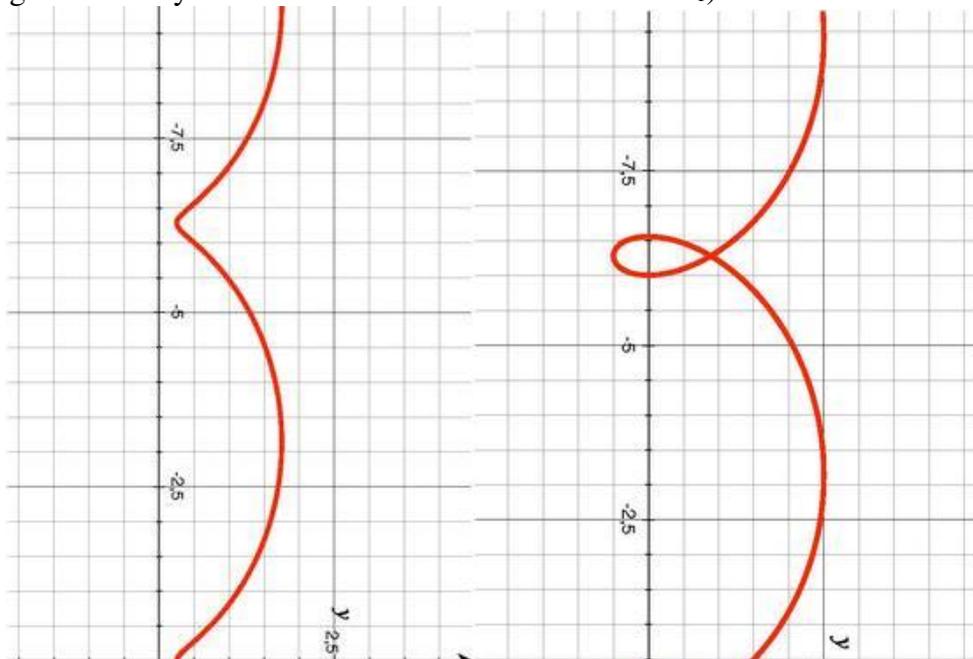
On en déduit à l'aide de **Q.5** : 
$$\begin{cases} v_y = -\frac{E_1}{B_0} \\ v_x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \vec{V}_d = -\frac{E_1}{B_0} \vec{e}_y$$

**Q.7)**  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}_d = \vec{u} - \frac{E_1}{B_0} \vec{e}_y$  que l'on injecte dans l'équation vectorielle du mouvement en remarquant que  $m\ddot{\vec{u}} = q(\vec{u} + \vec{V}_d) \wedge \vec{B}_0 + q\vec{E}_1 = q\vec{u} \wedge \vec{B}_0$

On retrouve l'équation du mouvement de **Q.1** donc on obtient 
$$\begin{cases} \dot{u}_x - \Omega_c u_y = 0 & (a) \\ \dot{u}_y + \Omega_c u_x = 0 & (b) \\ \dot{u}_z = 0 \end{cases}$$

La vitesse  $\vec{u}$  représente la vitesse de la particule dans le référentiel  $R_d$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V}_d$  par rapport au référentiel du laboratoire  $R_L$ .

On a montré dans **Q.3** que les équations différentielles vérifiées par  $\vec{u}$  conduisent à un mouvement circulaire uniforme, ici dans le référentiel  $R_d$ . Dans le référentiel  $R_L$  il est donc la composition de ce mouvement circulaire uniforme et du mouvement d'entraînement de  $R_d$ . La trajectoire a donc la forme d'une trochoïde (« cycloïde allongée » ou « cycloïde raccourcie » selon la valeur de  $E_1$ )



### I.C – Les siffleurs atmosphériques

**Q.8)** On se place à une échelle très supérieure à  $\rho_c$ , le courant de particules chargées se limite au terme de dérive à la vitesse  $\vec{V}_d$ , le terme dû au mouvement circulaire générant un courant nul en moyenne.

Ainsi  $\vec{j} = -n^* e \vec{V}_d$

D'après **Q.7**,  $\vec{V}_d \wedge \vec{B}_0 + \vec{E}_1 = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_d \wedge \vec{e}_z = -\frac{\vec{E}_1}{B_0} \rightarrow \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_1}{B_0} = -\vec{V}_d \rightarrow \vec{j} = n^* e \cdot \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_1}{B_0}$  Posons  $\gamma = \frac{n^* e}{B_0}$

Soit  $\gamma = -\frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\Omega_c}$

**Q.9)** Seul l'ordre de grandeur de  $n^*$  est fourni, on se contentera pour répondre à la question des ordres de grandeurs des valeurs demandées :  $|\Omega_c| \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $\omega_p \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $\frac{\omega_p^2}{\Omega_c} \approx 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Pour les VLF,  $\omega \approx 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$  est très inférieure aux valeurs précédentes.

**Q.10)** Par définition :  $I_0 = \langle \vec{I} \cdot \vec{e} \rangle = \langle \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} \cdot \vec{e} \rangle$

Or dans le vide,  $(\vec{e}, \vec{E}_1, \vec{B}_1)$  forment un trièdre direct et  $B_1 = \frac{E_1}{c}$ , d'où  $I_0 = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c}$

$\rightarrow E_1 = \sqrt{2\mu_0 c I_0}$  et  $B_1 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I_0}{c}}$