TD : Oscillateurs amortis

TD complémentaire

1 Étude du séismographe CCINP -PSI 2021

Un séisme ou tremblement de terre est une secousse du sol résultant de la libération brusque d'énergie accumulée par les contraintes exercées sur les roches. Cette libération d'énergie provient de la rupture des roches le long d'une faille préexistante, d'une activité volcanique. Elle peut être aussi d'origine artificielle (explosions par exemple). Les mouvements des roches engendrent des vibrations élastiques qui se propagent, sous la forme de paquets d'ondes sismiques, autour et au travers du globe terrestre.
Les mouvements du sol sont étudiés par l'intermédiaire de sismographes. L'acquisition et l'enregistrement du signal s'obtiennent dans une station sismique regroupant, outre les sismographes eux-mêmes, des enregistreurs, des numériseurs, des horloges et des antennes GPS.

Un sismographe simple (figure 1) est constitué d'un support rigide de hauteur h, auquel on suspend une masse m, supposée ponctuelle, par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable de raideur k, de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ. Cet amortisseur exerce une force sur la masse m, $\overrightarrow{F_a} = \lambda \frac{d}{dt}(h - z)\overrightarrow{u_z}$.

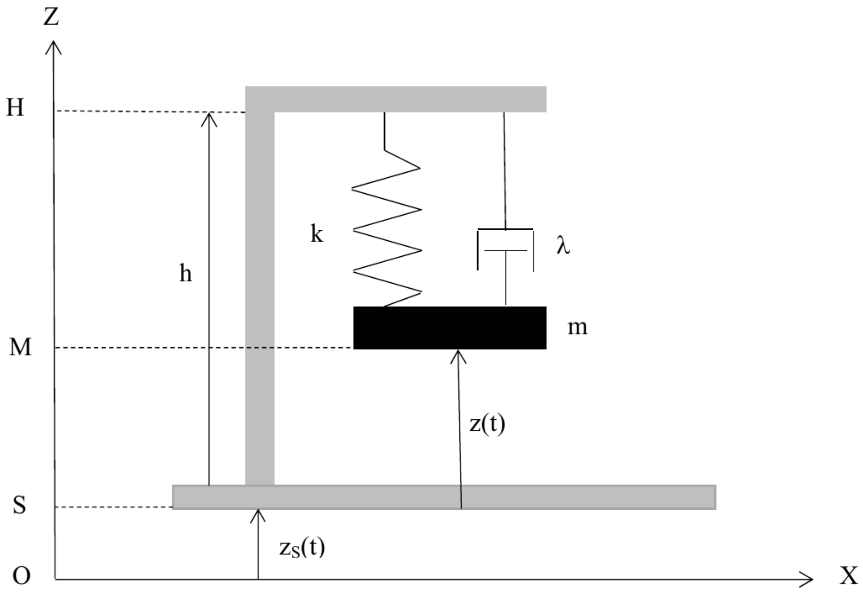


Figure 1 - Sismographe

Un mouvement vertical du sol déclenche un mouvement vertical de la masse m caractérisé par la fonction $z(t)$ dans le référentiel lié au sol.

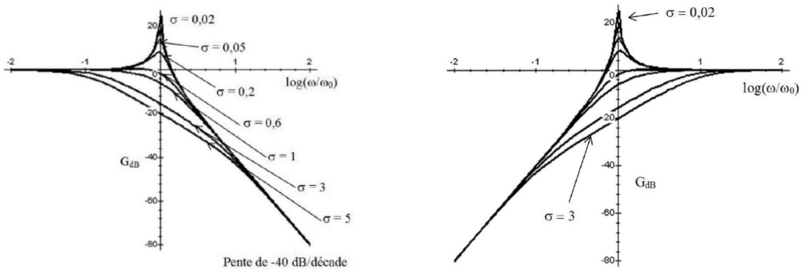
On pose : $z(t) = z_{eq} + u(t)$. La position $z = z_{eq}$ correspond à la position d'équilibre de la masse m en l'absence de séisme et $u(t)$ représente l'écart par rapport à l'équilibre.
On modélise une composante en fréquence de la vibration verticale du sol par rapport à un référentiel galiléen (O, X, Y, Z) au moyen de la fonction : $z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

1. Écrire l'équation différentielle qui relie $z(t)$, $z_s(t)$, m, g, λ, h, k et l_0. Préciser l'expression de z_{eq}, puis l'équation différentielle qui relie $u(t)$, $z_s(t)$, m, λ et k.

Le sismographe peut être assimilé à un système linéaire de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{z_s}(t)}$$

On donne sur la figure 2 les diagrammes de Bode en amplitude pour des filtres du second ordre.



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}+(\frac{j\omega}{\omega_0})^2} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0(\frac{j\omega}{\omega_0})^2}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}+(\frac{j\omega}{\omega_0})^2}$$

Figure 2 - Diagrammes de Bode en amplitude

2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du sismographe en fonction de m, k, λ, ω et j, nombre complexe tel que $j^2 = -1$. De quel type de filtre s'agit-il ?
3. Préciser l'expression de l'amplitude maximale U de la réponse verticale $u(t)$ du régime forcé de la masse m en fonction de Z_0, m, k, λ et ω.
4. Écrire deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude U du mouvement de la masse soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. La suspension est-elle qualifiée de souple ou de rigide ? La masse vibre-t'elle en phase, en quadrature de phase ou en opposition de phase avec le sol ?
5. Le cahier des charges du sismographe impose d'éviter tout phénomène de résonance, ce qui impose une condition supplémentaire sur la grandeur sans dimension $\frac{\lambda}{\sqrt{km}}$. Préciser cette condition supplémentaire à l'aide d'une inégalité.

2 Correction

1. On se place dans le référentiel galiléen auquel est attaché le repère (O, X, Y, Z). On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté suivant (O_Z).

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(z + z_s) = -m \cdot g - \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (h - z - \ell_0), \tag{1}$$

soit :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (z + \ell_0 - h) = -m \cdot \left(g + \frac{d^2 z_s}{dt^2}\right).} \tag{2}$$

En l'absence de mouvement du sol, à l'équilibre, $\frac{dz}{dt} = 0$ et $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, d'où :

$$k \cdot (z_{éq} + \ell_0 - h) = -m \cdot g. \tag{3}$$

On pose u tel que $z = z_{éq} + u$. Alors :

$$m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot (z_{éq} + \ell_0 - h + u) = m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u - m \cdot g = -m \cdot \left(g + \frac{d^2 z_s}{dt^2}\right), \tag{4}$$

soit finalement :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u = -m \cdot \frac{d^2 z_s}{dt^2}.} \tag{5}$$

2. On passe en notation complexe :

$$-\omega^2 \cdot m \cdot \underline{u} + j \cdot \omega \cdot \lambda \cdot \underline{u} + k \cdot \underline{u} = +\omega^2 \cdot m \cdot \underline{z}_s, \tag{6}$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{z}_s} = \frac{\omega^2 \cdot m}{-\omega^2 \cdot m + j \cdot \omega \cdot \lambda + k}. \tag{7}$$

On factorise par k pour obtenir la forme présentée dans l'énoncé :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\dfrac{m}{k} \cdot \omega^2}{1 + \jmath \cdot \omega \cdot \dfrac{\lambda}{k} - \dfrac{m}{k} \cdot \omega^2}.} \tag{8}$$

Il s'agit d'un filtre <u>passe-haut du deuxième ordre</u>.

3. Ayant $U = |\underline{H}| \cdot Z_0$, il vient :

$$\boxed{U = \frac{\dfrac{m \cdot \omega^2}{k} \cdot Z_0}{\left(1 - \dfrac{m \cdot \omega^2}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda \cdot \omega}{k}\right)^2}.} \tag{9}$$

4. L'amplitude des déplacements de la masse reproduira celle du sol si numérateur et dénominateur s'égalisent, si :

$$1 \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda \cdot \omega}{k} \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k}, \tag{10}$$

donc si :

$$\boxed{\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega \gg \frac{\lambda}{m}.} \tag{11}$$

La deuxième relation traduit un amortissement faible, donc une <u>suspension souple</u>. En outre, les conditions précédentes étant remplies, on a $\underline{H} \sim -1$, donc les signaux sont en <u>opposition de phase</u>.

5. D'après les courbes d'amplitude données dans l'énoncé, il n'y a pas résonance lorsque $\sigma \gtrsim 0,6$. Par identification avec la relation (8),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2 \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \cdot \frac{\lambda}{k}, \tag{12}$$

soit :

$$\sigma = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}}. \tag{13}$$

On évitera donc la résonance lorsque :

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 0,6, \qquad \boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 1,2.} \tag{14}$$