TD : Dynamique du point

1 Application directe du cours

App1 : Archimède

Combien de ballons remplis d'hélium faut–il pour soulever une masse de 10kg ? On négligera le poids les ballons d'hélium devant celui de la masse.

Données : $\rho_{He} = 0,18\,\text{g/L}$, $\rho_{air} = 1,22\,\text{g/L}$, $V_{ballon} = 2,7$.

App2 : Force électrostatique

Comparer l'intensité de l'attraction gravitationnelle et électrostatique entre un noyau d'Hydrogène et l'électron de son cortège électronique.
Données : $m_H = 1,6 \times 10^{-27}\,\text{kg}$; $m_e = 9,1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$; $e = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{C}$; $d_{H-e} = 0,5 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$

App3 : Système masse-ressort sur un plan incliné

On considère une masse m posée sur un plan incliné d'angle au sommet α. Cette masse est attachée en haut du plan incliné par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On considérera un repère xOy dont l'axe Ox est celui du plan incliné et dont l'origine se situe en haut, au point d'accroche du ressort. L'axe Oy est la perpendiculaire à Ox ascendante. Nous supposons qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.

1. Faire un schéma du dispositif et identifier les éléments usuels de la dynamique.
2. Déterminer la position d'équilibre x_e du ressort.
3. À partir de la position d'équilibre, M est déplacé de D et relâché sans vitesse initiale. Exprimer x en fonction de t.

App4 : Tir parabolique

Le tir parabolique est un cas particulier de chute libre, où la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ n'est pas nulle. On considère un canon, tirant à l'instant $t = 0$ un boulet M de masse m, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$. Le tube du canon fait un angle α avec le sol.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement.
2. En déduire la trajectoire du boulet.
3. Quelle est la portée du tir ? Montrer qu'il existe 2 angles α donnant la même portée. Quelle est la hauteur maximale (appelée la flèche) atteinte par le boulet dans les deux cas ? Pour quel angle α la portée est-elle maximale ?
4. La parabole de sûreté est la zone en dehors de laquelle le boulet ne peut aller, quelque soit l'angle α. Déterminer l'équation de la parabole de sûreté.

App5 : Traîneau sur un plan incliné

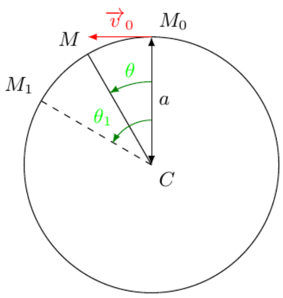
Un traîneau est tiré sur un plan incliné (faisant un angle α par rapport à l'horizontale) par un fil faisant un angle β par rapport à la ligne de plus grande pente.

1. Dans le cas où le mouvement est uniforme, déterminer la réaction du sol :
   a) en supposant que la force de traction est constante.
   b) en supposant qu'il n'y a pas de frottement.
2. Arrivé au sommet de la côte, il est abandonné sans vitesse initiale sur un nouveau plan incliné d'angle θ par rapport à l'horizontale. On suppose qu'il y a des frottements solides entre le traîneau et le sol avec un coefficient de frottement dynamique f_d .
   a) Calculer l'accélération du traîneau dans la descente.
   b) Quelle condition doit vérifier θ pour que le traîneau se mette en mouvement ?

2 Exercices

EX1 : Piste de BMX

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un BMX et son rider sont assimilés à un point matériel M de masse m, mobile sur la surface d'une bosse modélisée par une sphère S, de centre C et de rayon a, subit de la part de celle-ci une action de contact sans frottements. Le point M est lâché au sommet de la sphère avec la vitesse v_0 , il glisse sur la sphère puis décolle en M_1.



1. Déterminer l'équation du second ordre vérifiée par θ tant que M reste en contact avec la sphère.
2. On pose $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire $\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta$. Intégrer l'équation différentielle par rapport à θ. En déduire le calcul de la réaction de la sphère.
3. Calculer la réaction à $t = 0$. En déduire que si $v_0 > V$ que l'on déterminera, le point quitte la sphère dès le sommet. On se place dans le cas où $v_0 < V$. Calculer l'angle θ_1 pour lequel M quitte la bosse. Calculer le chemin parcouru sur la sphère par le point lorsque $v_0 = V/2$.

EX2 : Avion humanitaire

Un avion humanitaire vole à une altitude $h = 6000$ m, à la vitesse $v_0 = 750$ km/h . Il laisse tomber un colis, assimilé à un point matériel, de masse m de nourriture et de médicaments, en passant à la verticale d'un point A.

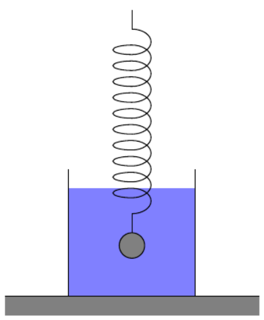
1. Déterminer le temps nécessaire τ pour que le colis atteigne le sol.
2. Quelle est la distance d parcourue par l'avion pendant ce temps ?
3. À quelle distance du point A se trouve le colis quand il arrive sur le sol ?
4. Reprendre les questions précédentes si l'avion a initialement une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle $\beta = 30°$ par rapport à l'horizontale.
5. L'avion est initialement dans les mêmes conditions qu'à la question 4. De quelle hauteur aurait-on dû lâcher le colis pour qu'il tombe à moins de 100 m du point A ?

EX3 : Point matériel fixé à deux ressorts verticaux

Un point matériel de masse m est fixé à deux ressorts verticaux identiques de longueur au repos l_0 et de raideur k.

1. Calculer à l'équilibre les longueurs l_{1e} et l_{2e} des ressorts en fonction de m, g, k, et a.
2. Que deviennent ces expressions dans la limite $mg \ll ka$. Commenter.
3. On considère des petits déplacements verticaux de la masse par rapport à la position d'équilibre. Exprimer y en fonction de t si la masse est lâchée en y_0 sans vitesse à l'instant initial.

EX4 : Détermination d'un coefficient de viscosité



Un sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de sphère.

1. Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T .

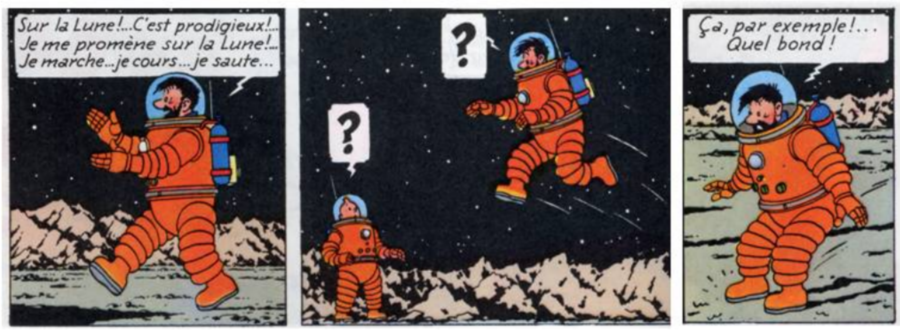
2. Dans l'air, où les frottements sont négligeables, la période des oscillations est T_0 . Déterminer le coefficients de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0 .

3 Problèmes

Les problèmes vont maintenant être moins guidés que dans les TD précédents, vous devez établir un raisonnement en plusieurs étapes qui vous permettra de résoudre le problème. Dans certains cas, vous serez contraint d'ajouter des hypothèses, il faudra alors les justifier proprement.

Pb1 : Bond sur la lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.

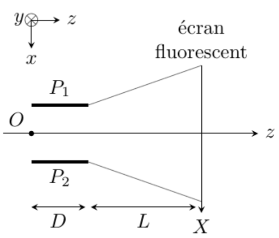


On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre d'inertie. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_L l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune, environ six fois plus faible que sur Terre.

Trouver la longueur du bond.

Pb2 : Oscilloscope analogique

Dans une époque pas si reculée où la touche autoscale n'existait pas, les oscilloscopes analogiques exploitaient la déviation d'un faisceau d'électron sous l'effet d'une tension à imager sur un écran. Cet exercice propose de comprendre le principe de fonctionnement de ces anciens oscilloscopes. Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel terrestre, auquel est associé un repère (O, u_x, u_y, u_z).



Une zone de champ électrique uniforme est établie entre deux plaques P_1 et P_2 , le champ est supposé nul en dehors de cette zone et les effets de bord sont négligés. La distance entre les plaques est notée d, la longueur des plaques D et on note U la tension (supposée constante et positive) entre les plaques, égale à la tension d'entrée de l'oscilloscope. On admet que le champ électrique entre les plaques s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = -\frac{U}{d}\overrightarrow{u_x}$$

Des électrons accélérés au préalable pénètrent en O la zone où existe le champ avec une vitesse $v_0 = v_0\overrightarrow{u_z}$ $\overrightarrow{u_z}$ selon l'axe Oz.

1. Établir l'équation de la trajectoire $x = f(z)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de d, U et v_0 .
2. Déterminer les coordonnées du point de sortie K de la zone de champ et les composantes de la vitesse en ce point.
3. On note L la distance entre la sortie de la zone de champ et l'écran fluorescent. Déterminer l'abscisse x_I du point d'impact I de l'électron sur l'écran en fonction de U , v_0 , D, d et L.
4. À la lumière des questions précédentes, expliquer le principe de fonctionnement d'un oscilloscope analogique. Proposer une solution permettant d'obtenir un chronogramme sur l'écran et pas seulement un point.