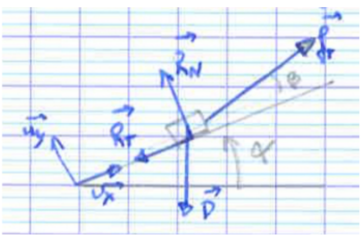
TD : Dynamique du point

1 Application directe du cours

App4 : Tir parabolique

1. $m\vec{a} = -mg\vec{u_z}$, on intègre en considérant la condition initiale : $\vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha\vec{u_x} + \sin\alpha\vec{u_y})$ Ce qui donne :
$$\begin{cases} v_x(t) & = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) & = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} x(t) & = v_0\cos\alpha t \\ v_y(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \end{cases}$$
2. On trouve $t(x)$ et on remplace : $y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}(1-\tan^2\alpha) + x\tan\alpha$
3. On résout $z(x) = 0$, ce qui donne $x_p = v_0^2\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$
4. Flèche maximale $v_y = 0$
5. En physique et en balistique, on désigne par parabole de sûreté la courbe enveloppe de toutes les trajectoires paraboliques possibles d'un corps lancé depuis un point donné avec une vitesse donnée dans un plan vertical d'azimut fixé Nul point en dehors de cette courbe ne peut être atteint par un projectile ayant cette vitesse initiale : la zone est « sûre ».
L'ensemble des points pouvant être atteint par le projectile vérifient l'équation : $y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}(1-\tan^2\alpha) + x\tan\alpha$ Fixons alors un point de l'espace (x_0, y_0) et notons $u = \tan\alpha$ l'équation devient $y_0 = -\frac{1}{2}g\frac{x_0^2}{v_0^2}(1-u^2) + x_0u$ Soit $\frac{1}{2}g\frac{x_0^2}{v_0^2}u^2 + x_0u - y_0 - \frac{1}{2}g\frac{x_0^2}{v_0^2} = 0$.
On cherche le moment ou cette équation n'a qu'une seule solution $\Delta = 0$ (cas limite car si $\Delta < 0$ il n'y a pas de solution et la zone est sûre) En calculant $\Delta = 0$ on trouve la condition $y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ qui est l'équation de la parabole.

App5 : Traîneau sur un plan incliné



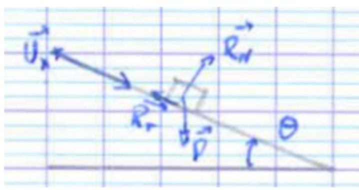
1.a Système traineau (supposé ponctuel), référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces : poids, tension du fil, réaction du sol. Le PFD projeté suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ s'écrit

$$m\ddot{x} = f_T\cos\beta - R_T - mg\sin\alpha\ ;\ m\ddot{y} = R_N + f_T\sin\beta - mg\cos\alpha$$

Le mouvement est uniforme donc $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ alors

$$\vec{R} = (f_T\cos\beta - mg\sin\alpha)\vec{u_x} + (mg\cos\alpha - f_T\sin\beta)\vec{u_y}$$

1.a En l'absence de frottement $R_T = 0$.



2.a. PFD suivant $\vec{u_x}$: $\ddot{x} = g\sin\theta - gf_d\cos\theta$
2.b. Au repos on a $R_T < f_d sR_N$, le système entre en mouvement si $R_T = f_sR_N > f_dR_N$. Or la réaction normale compense la projection du poids $R_N = mg\cos\theta$ et au repos $R_T = mg\sin\theta$ donc

$$mg\sin\theta = f_smg\cos\theta \Longrightarrow \theta = \arctan f_s$$

2 Exercices

EX1 : Piste de BMX

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un BMX et son rider sont assimilés à un point matériel M de masse m, mobile sur la surface d'une bosse modélisée par une sphère S, de centre C et de rayon a, subit de la part de celle-ci une action de contact sans frottements. Le point M est lâché au sommet de la sphère avec la vitesse v_0 , il glisse sur la sphère puis décolle en M_1.

1. Système point M , référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces : poids et réaction du support. Le PFD s'écrit

   $m\overrightarrow{a} = -mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} + mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} + R\overrightarrow{u_r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} = \quad -g\cos\theta\overrightarrow{u_r} + g\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} + R/m\overrightarrow{u_r}$

   Soit avec $r = a$

   $$\begin{cases} -a\dot{\theta}^2 & = -g\cos\theta + R/m \\ a\ddot{\theta} & = g\sin\theta \end{cases}$$

2. Différentiation : $\dot{\theta} = \omega$ soit suivant $\overrightarrow{u_\theta}$

   $$a\frac{d\omega}{dt} = g\sin\theta \Longrightarrow \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{a}\sin\theta$$

   On obtient donc après une intégration par rapport à θ :

   $$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{g}{a}(\cos\theta_0 - \cos\theta) \qquad (1)$$

   avec $\theta_0 = \theta(t = 0) = 0$ donc $\cos\theta_0 = 1$; $\omega_0 = \omega(t = 0) = \frac{v_0}{a}$.
   Alors la réaction de la sphère s'écrit : $R = -ma\omega^2 + mg\cos\theta = -ma\left(2g/a(1 - \cos\theta) + \frac{v_0^2}{a^2}\right) + mg\cos\theta = -2mg - \frac{mv_0^2}{a} + 3mg\cos\theta$

3. En $t = 0$, on a $\theta = 0$ donc $R(0) = mg - \frac{mv_0^2}{a}$
   Le point M n'est pas en contact avec la sphère si $R = 0$ donc en $t = 0$ le point M décolle si $mg - \frac{mv_0^2}{a} = 0$ soit $v_0 = \sqrt{ga}$, le M décolle si on lance le mobile avec une vitesse supérieure à v_0. Dans le cas contraire, le point M glisse à la surface de la sphère jusqu'à ce que $R = -2mg - \frac{mv_0^2}{a} + 3mg\cos\theta = 0$
   Soit :

   $$\theta_1 = arctan(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3ga})$$

EX2 : Avion humanitaire

1. Objet en chute libre $\ddot{z} = -g$ donc $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$, le colis atteint le sol en $t_s = \frac{2h}{g} \approx 35s$
2. $d = v_0 t_s \approx 7290\,\mathrm{m}$
3. Même distance horizontale que l'avion en l'absence de frottement.
4. $\ddot{z} = -g$ avec les conditions initiales : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h - v_0\sin\beta t$ pour $t = t_s$ on a $-\frac{1}{2}gt^2 + h - v_0\sin\beta t = 0$ Soit $\Delta = v_0^2\sin^2\beta + 2gh$ donc $t_s = -\frac{v_0\sin\beta}{g} + \sqrt{(\frac{v_0^2\sin^2\beta}{g^2} + \frac{2h}{g})} = 26s$ et $d_h = v_0 t_s\cos\beta = 4510\mathrm{m}$
5. On veut $d = 100\mathrm{m}$ donc $t_s = 0.55\mathrm{s}$ soit $h = 59\mathrm{m}$

EX3 : Point matériel fixé à deux ressorts verticaux

Un point matériel de masse m est fixé à deux ressorts verticaux identiques de longueur au repos l_0 et de raideur k.

1. Calculer à l'équilibre les longueurs l_{1e} et l_{2e} des ressorts en fonction de m, g, k, et a.
2. Que deviennent ces expressions dans la limite $mg \ll ka$. Commenter.
3. On considère des petits déplacements verticaux de la masse par rapport à la position d'équilibre. Exprimer y en fonction de t si la masse est lâchée en y_0 sans vitesse à l'instant initial.

EX4 : Détermination d'un coefficient de viscosité

1. Système masse, référentiel terrestre supposé galiléen, bilan des forces : poids, force de rappel, frottement fluide. Le PFD projeté sur la verticale s'écrit :

$$m\ddot{z} = -mg - k(l - l_0) - 6\pi\eta r\dot{z}$$

avec l'élongation $z = l - l_0$ donc

$$\ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

2. Avec ce terme de frottement on obtient l'équation d'un oscillateur amorti associé au polynome caractéristiques $\rho^2 + \frac{6\pi\eta r}{m}\rho + \frac{k}{m} = 0$ de discriminant

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0 \text{ (car régime pseudo–périodique)}$$

Les solutions associées s'écrivent $\rho = \frac{1}{2}\left(-\frac{6\pi\eta r}{m} \pm j\sqrt{-\Delta}\right)$ on introduit donc la pseudo–pulsation $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et donc la pseudo–période

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 + 4\frac{k}{m}}}$$

Or la pulsation propre de l'oscillateur harmonique associé s'écrit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ donc $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ donc

$$\frac{1}{T^2} = \frac{-\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 + 4\frac{k}{m}}{16\pi^2} = -\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2\frac{1}{16\pi^2} + \frac{k/m}{4\pi^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{9\eta^2 r^2}{4m^2}$$

Donc

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

3 Problèmes

Les problèmes vont maintenant être moins guidés que dans les TD précédents, vous devez établir un raisonnement en plusieurs étapes qui vous permettra de résoudre le problème. Dans certains cas, vous serez contraint d'ajouter des hypothèses, il faudra alors les justifier proprement.

Pb1 : Bond sur la lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.

1 On étudie le mouvement du capitaine Haddock, modélisé par un point matériel M de masse m en évolution dans le référentiel lunaire $\mathcal{R}$, supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{P} = m\vec{g}_L$. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} = m\vec{g}_L \qquad \text{soit} \qquad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{g}_L$$

Le mouvement étant uniformément accéléré, il va être plan, le repérage le plus naturel pour l'étudier est un repérage cartésien dont un axe est confondu avec l'accélération et l'origine à la position initiale du capitaine Haddock. On peut alors construire le schéma figure 2, où on représente à la fois la situation initiale pour introduire les notations et une situation quelconque.

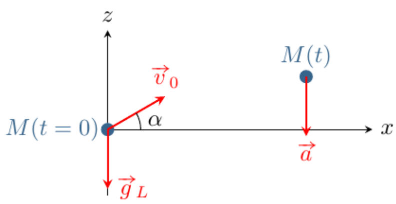


Figure 2 – **Saut du capitaine Haddock sur la Lune.**

En projection, la loi de la quantité de mouvement donne (les constantes se déterminent à partir des conditions initiales)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -m\,g_L \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \text{cte} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -g_L t + \text{cte} = g_L t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\, t + \text{cte} = v_0 \cos\alpha\, t \\ z = -\dfrac{1}{2}g_L t^2 + v_0\sin\alpha\, t + \text{cte} = -\dfrac{1}{2}g_L t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}}$$

2 D'après l'équation du mouvement en x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\,.$$

En insérant ce résultat dans l'équation sur z, on trouve l'équation de la trajectoire

$$z = -\frac{1}{2}g_L\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z = -\frac{g_L}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x}$$

3 La distance L parcourue par la capitaine Haddock en sautant est telle que $z(L) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = L\left(-\frac{g_L}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha\right)$$

Mathématiquement, $L = 0$ est solution, mais c'est bien sûr le point de départ du saut. La solution physiquement pertinente est donc telle que

$$-\frac{g_L}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha = 0 \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{2{v_0}^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g_L} = \frac{2{v_0}^2\cos\alpha\sin\alpha}{g_L}$$

et finalement

$$\boxed{L = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g_L}}$$

> *Rappel mathématique :* $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

4 La distance L' que le capitaine Haddock parcourrait sur Terre avec le même saut serait

$$L' = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g_T}$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \frac{g_T}{g_L}L' = 6L' = 9\,\text{m}\,.}$$

Pb2 : Oscilloscope analogique

$\boxed{\mathbf{1}}$ La force de Lorentz électrique s'exprime simplement comme

$$\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} = \frac{eU}{d}\,\overrightarrow{u}_x\,.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ ▷ Système : électron de masse m ;

▷ Référentiel : terrestre, considéré galiléen.

▷ Bilan des forces : uniquement la force électrique.

▷ Application du PFD : comme ni la force électrique, ni la vitesse initiale n'ont de composante sur $\overrightarrow{u}_y$ alors l mouvement de l'électron est limité au plan (xOz). Les projections s'écrivent

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \dfrac{e\,U}{d} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

▷ Première intégration pour trouver la vitesse :
→ Forme générale des solutions :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e\,U}{m\,d}\,t + C_x \\ \dot{z} = C_z \end{cases}$$

→ Condition initiale : $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0\,\overrightarrow{u}_z$.
→ Détermination des constantes :

$$\dot{x}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C_x \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C_z \underbrace{=}_{\text{CI}} v_0$$

→ Conclusion :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e\,U}{m\,d}\,t \\ \dot{z} = v_0 \end{cases}$$

▷ Deuxième intégration pour trouver les lois horaires :
→ Forme générale des solutions :

$$\begin{cases} x = \dfrac{e\,U}{2\,m\,d}\,t^2 + C'_x \\ z = v_0\,t + C'_z \end{cases}$$

→ Condition initiale : l'électron se trouve initialement en O.

→ Détermination des constantes :

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C'_x \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{et} \qquad z(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C'_z \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

→ Conclusion :

$$\begin{cases} Xx = \dfrac{e\,U}{2\,m\,d}\,t^2 \\ z = v_0\,t \end{cases}$$

▷ Trajectoire : il faut éliminer t de l'une de ces équations, ce qui se fait en remplaçant t par z/v_0 dans l'équation portant sur x, d'où

$$\boxed{x = \frac{e\,U}{2\,m\,d\,v_0^2}z^2}$$

3 Comme les plaques ont pour longueur D, alors on a forcément

$$\boxed{z_K = D \qquad \text{et} \qquad x_K = \frac{e\,U}{2\,m\,d\,v_0^2}D^2\,.}$$

Le plus simple pour déterminer la vitesse en sortie est de déduire l'instant $t_K = z_K/v_0 = D/v_0$ où la particule passe par K de la loi horaire et de le substituer dans la loi de vitesse, ce qui donne

$$\boxed{\dot{x}_K = \frac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0} \qquad \text{et} \qquad \dot{z}_K = v_0}$$

4 En supposant la vitesse v_K suffisamment élevée pour que l'effet du poids de la particule puisse être négligé, celle-ci n'est soumise à aucune force. **Son mouvement est alors rectiligne uniforme.**

5 Comme le mouvement est rectiligne uniforme, on sait qu'à tout instant

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_K = \frac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0} \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(t) = \dot{z}_K = v_0\,.$$

Si on rédéfinit l'instant $t = 0$ comme l'instant auquel l'électron atteint le point K, on peut intégrer ces équations différentielles.

▷ Forme générale des solutions :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0}\,t + C_x \\ z(t) = v_0 t + C_z \end{cases}$$

▷ Condition initiale : attention, l'instant $t = 0$ a été redéfini, donc

$$x(0) = x_K = \frac{e\,U}{2\,m\,d\,v_0^2}D^2 \qquad \text{et} \qquad z(0) = z_K = D\,.$$

▷ Détermination des constantes :

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C_x \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{e\,U}{2\,m\,d\,v_0^2}D^2 \qquad \text{et} \qquad z(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} C_z \underbrace{=}_{\text{CI}} D\,.$$

▷ Conclusion :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0}\left(t + \dfrac{D}{2v_0}\right) \\ z(t) = v_0 t + D \end{cases}$$

L'électron atteint l'écran à l'instant $t^\star$ tel que $z(t^\star) = D + L$ soit $t^\star = L/v_0$. On en déduit alors

$$x_I = x(t^\star) = \frac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0}\left(\frac{L}{v_0} + \frac{D}{2v_0}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{X_I = \frac{e\,U\,D}{m\,d\,v_0^2}\left(L + \frac{D}{2}\right)\,.}$$

L'abscisse du point d'impact xI sur l'écran est proportionnelle à la tension et permet donc de la visualiser directement. Pour obtenir un chronogramme sur l'écran et pas seulement un point, il faut d'une part que la fluorescence dure suffisamment longtemps, et d'autre part que la direction d'émission des électrons varie au cours du temps. Cela est assuré par deux autres plaques alimentées par une tension alternative dépendant de la base de temps qui dévient les électrons le long de la direction y.