TD : Énergétique du point matériel

1 Applications directes du cours

App1 : Distance de freinage

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de $v_0 = 130\,\mathrm{km/h}$. On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route. On rappelle que la réaction de la route se décompose en une composante normale R_N et une composante tangentielle R_T de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie $R_T = fR_N$ en notant f le coefficient de frottement. Il faut $D_0 = 500\,\mathrm{m}$ pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'aucune force de freinage ne s'exerce.

1. Calculer la distance de freinage D si la vitesse initiale était de $v_0' = 110\,\mathrm{km/h}$.
2. Le résultat est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale (la voiture montant ou descendant la pente) ?

Réponse :

1. $\Delta E_m = R_T D = \Delta E_c$ donc $\frac{D'}{D} = \frac{v_0'^2}{v_0^2}$ soit $D' = 357\,\mathrm{m}$
2. En pente, il apparait une variation d'énergie potentielle modifiant le bilan d'énergie mécanique. Ou alors on travaille avec le théorème de l'énergie cinétique et il apparait un travail supplémentaire. En montée le poids aide au freinage, en descente il s'oppose au freinage.

App2 : Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin. Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.
On note $l_0 = 2m$ la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est $l = 50\,\mathrm{cm}$. On supposera que le Marsupilami pèse 50 kg et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure l_c .

1. Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$.
2. Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

Réponse : 1
1.Si l'on néglige les frottements, le marsupilami est soumis à son poids (force conservative) et à la force de rappel du ressort (force conservative) alors l'énergie mécanique du Marsupilami est une constante du mouvement $E_m = E_{pp} + E_c + E_{pel}$.
Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique $E_m = 0 + \frac{1}{2}k(l_m - l_0)^2$,

Il serait également raisonnable d'inclure une contribution d'énergie potentielle de pesanteur à l'énergie mécanique, mais cela ne modifierait pas beaucoup le résultat final. Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur, $E_m = mgh$

D'après la conservation de l'énergie mécanique, $\frac{1}{2}k(l_m - l_0)^2 = mgh$ et $k = 4,4 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m}$.

Réponse : 2
Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur l_c au-dessus du sol avec une vitesse v . Son énergie mécanique vaut alors $E_m = mgl_0 + \frac{1}{2}mv^2$ et d'après la conservation de l'énergie : $mgl_0 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$ ce qui donne $v = 12,5\,m/s = 45km/h$.

App3 : Le skieur

Un skieur pesant 70 kg descend une piste rectiligne longue de 50 m et inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction $\overrightarrow{R}$ de la piste, qui se décompose en une composante normale N perpendiculaire à la piste et une composante tangentielle T colinéaire et de sens opposé à la vitesse. Les normes de ces deux composantes sont liées entre elles par la loi de Coulomb, $T = \mu N$, avec $\mu = 0.1$.

1. Faire un schéma de la situation en représentant les différentes forces.
2. Exprimer le travail des trois forces au cours de la descente.
3. En admettant que le skieur part du haut de la piste sans vitesse initiale, appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer sa vitesse en bas de la piste.

Réponse : 2
Seules T et P travaillent : $W_P = mgL\sin\alpha$. Calculons enfin le travail de la force de réaction tangentielle . La seule chose que l'on connaisse à son sujet est le lien entre sa norme et celle de N. Comme le mouvement du skieur demeure sur la piste sans s'enfoncer, alors $P_y + N = 0$ d'où $T = \mu mg\cos\alpha$ et $W_T = -\mu Lmg\cos\alpha$.
Réponse : 3
$\Delta E_c = W_P + W_T = mgL\sin\alpha - \mu Lmg\cos\alpha$ or $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$ d'où $v = 18\,\mathrm{m/s}$

2 Exercices

EX1 : Mouvement sur un plan incliné

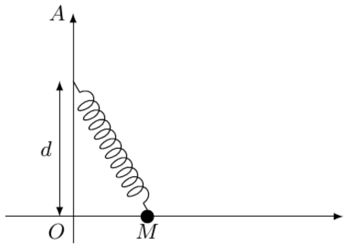
On abandonne sans vitesse initiale un cube (considéré comme un objet ponctuel) de masse m sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le cube glisse sans frottement sur une longueur L avant de rencontrer l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le ressort est initialement à sa longueur à vide.

1. Déterminer la longueur minimale que peut avoir le ressort.
2. Déterminer l'énergie potentielle de la masse avant et après le contact avec le ressort. Tracer le graphe de l'énergie potentielle. En déduire les positions d'équilibre.

Correction :

1. On travaille dans le référentielle terrestre supposé galiléen. Le système étudié est le cube, un point matériel ponctuel M de masse m. On note z l'altitude du point M et l la longueur du ressort. Les frottements sont négligés donc toutes les forces sont conservatives et l'énergie mécanique se conserve. Soit A la situation initiale et B la situation où le ressort est comprimé.
La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :
$$mgz_A = mgz_B + \frac{k}{2}(l_B - \ell_0)^2$$
Or $z_A = (L + \ell_0)\sin\alpha$ et $z_B = l_B\sin\alpha$. On a donc :
$$\frac{k}{2}(l_B - \ell_0)^2 + mg\sin\alpha(l_B - \ell_0) - mg\sin\alpha L = 0$$
Ce qui donne un polynôme du second ordre en $(l_B - \ell_0)$ que l'on résout en ne gardant que la racine négative car $l_B < \ell_0$:
$$l_B = \ell_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha\left(\sqrt{1 + \frac{2Lk}{mg\sin\alpha}} - 1\right)$$
2. On prend maintenant l'axe Ox parallèle au plan incliné et on place l'origine à ℓ_0 du sol.
Avant l'impact, seule l'énergie potentielle de pesanteur est à prendre en compte : $E_p = mgx\sin\alpha$
Après l'impact, il faut ajouter l'énergie potentielle du ressort : $E_p = mgx\sin\alpha + \frac{k}{2}x^2$
La position d'équilibre correspond au minimum d'énergie potentielle $\frac{dEp}{dt}(x) = 0$ soit $x_{eq} = \frac{-mg\sin\alpha}{k}$

EX2 : Ressort et bifurcation



Un point matériel M de masse m se déplace sans frottements le long d'un axe horizontal Ox (perle enfilée sur Ox). Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort sans masse de longueur à vide l_0 et de raideur k, à un point situé à la verticale de O tel que $OA = d$. On note $l = AM$ la longueur du ressort à un instant t. On néglige les frottements.

1. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(x)$ de M . On choisira comme référence $E_p(x = 0) = 0$.
2. Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et discuter de sa (leur) stabilité. On se placera dans les cas où $d > l_0$ et $d < l_0$. Vérifier la cohérence de vos résultats par une analyse qualitative.
3. Proposer un code python permettant de tracer l'énergie potentielle en fonction de x.

Réponse : 1
$E_p = E_{pp} + E_{p,el}$ or l'altitude ne change pas donc Epp est constante. L'énergie est définie à une constante E 0 près donc $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + E_0$ or $l^2 = x^2 + d^2$ donc $E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+d^2} - l_0)^2 - E_0$. Or on choisit l'origine des potentiels telle que $Ep(x = 0) = 0$ donc $E_0 = \frac{1}{2}k(d - l_0)^2$, finalement $E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+d^2} - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(d - l_0)^2$.

Réponse : 2

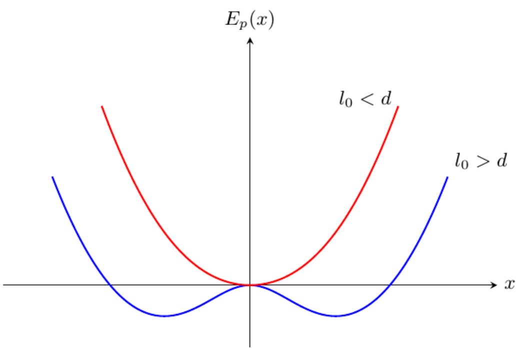
2. Positions d'équilibre telles que $x = x_{eq}$ et $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{eq}} = 0$:

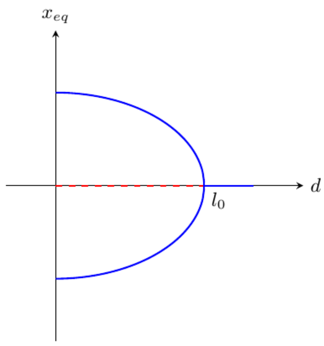
$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{eq}} = kx_{eq}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x_{eq}^2+d^2}}\right) = 0$$

Donc les positions d'équilibre sont $x_{eq} = 0$ et $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$ qui existe ssi $l_0 > d$.

Pour étudier la stabilité il faut étudier le signe de $\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x_{eq}^2+d^2}}\right) + kx^2\frac{l_0}{(x_{eq}^2+d^2)^{3/2}}$.

- Cas $x_{eq} = 0$: $\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = k\left(1 - \frac{l_0}{d}\right) > 0$ (i.e. équilibre stable) ssi $l_0 < d$.
- Cas $x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2} = \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\pm\sqrt{l_0^2-d^2}} = k\left(1 - \frac{l_0}{l_0}\right) + k(l_0^2 - d^2)\frac{l_0}{l_0^3} > 0$ car pour que cet équilibre existe il faut $l_0 > d$.





Trait plein : positions d'équilibre stable, trait tiret : positions d'équilibre instable.

EX3 : Arrêt d'un navire

La force de résistance $\overrightarrow{F}$ exercée par l'eau sur certains modèles de navires et pour des vitesses v comprises entre 10km/h et 20km/h est une fonction du type : $F = -k.v^3$.

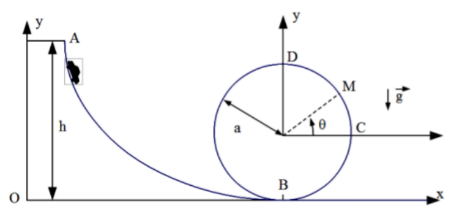
1. Donner la valeur numérique de la constante k sachant que la vitesse limite atteinte par le navire est de 10km/h lorsque le moteur fournit une puissance propulsive P = 4 MW.
2. Le moteur est coupé alors que le navire de masse 12000 t se déplace à une vitesse $v_1 = 16\,\text{km/h}$. Calculer la valeur numérique de la durée t_0 nécessaire pour que la vitesse du navire tombe à la valeur $v_2 = 13\,\text{km/h}$.

Réponse : 1
Théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_{mot} + P_f = 0$ car le navire est constante. Or $P_f = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = -kv^4$ donc $k = 67.10^3$ ks.s.m^{-2}.
Réponse : 2
Théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = m\dot{v}v = -kv^4$ donc $\frac{dv}{dt} = \frac{-k}{m}v^2$. on peut résoudre par séparation des variables :

$$\frac{dv}{v^3} = \frac{-k}{m}dt \Longrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}) = \frac{-k}{m}t_0$$

Soit $t_0 = 2,3\,\mathrm{s}$

EX4 : Looping



Une voiture de manège de masse $m = 24$kg est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon a=4,7m de la figure ci-dessous. La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$.
h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

1. Exprimer la vitesse v_B en B de la voiture en fonction de g et h.
2. Exprimer la vitesse $v_M(\theta)$ en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

   On considère maintenant la possibilité de décollage. Soit $\overrightarrow{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.
3. Exprimer $\overrightarrow{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.
4. Pour quel point M_0 du cercle la norme de R est-elle minimale ?
5. Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.
6. Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la voiture exerce sur les rails une force au moins égale au quart de son poids. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.

Réponse : 1, conservation de l'énergie mécanique
Bilan d'énergie mécanique $\Delta E_m = 0$ car le système est conservatif donc $E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) \Longrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$. On a choisit l'origine des potentielle en B donc $E_p(B) = 0$ et le véhicule est initialement au repos.

2) bilan d'énergie mécanique : $Ec(B)+Ep(B) = Ec(M)+Ep(M) \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_M(\theta)^2+mgy = \frac{1}{2}mv_M(\theta)^2 + mga(1+\sin\theta)$ ce qui permet de trouver v_M.

3) PFD dans la base polaire :

$$-ma\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta - R$$
$$ma\ddot{\theta} = -mg\cos\theta$$

Or $\dot{\theta}a = v_M(\theta)$ donc $R = mg(\frac{2h}{a} - 2 - 3\sin\theta)$

R est minimale quand le sin est maximal, i.e $\theta = \pi/0$

La voiture reste en contact avec le rail si $R > 0$ pour tout angle, en particulier si $Rmin > 0$. Soit $\frac{2h}{a} - 5 > 0 \Longrightarrow h \approx 11.75\,\mathrm{m}$

Pour des raisons de sécurité on souhaite que $R > mg/4$, en particulier $Rmin > mg/4$ ce qui conduit à $h > 12.5\,\mathrm{m}$

EX4 : Particules chargées

On considère deux particules chargées A (fixe) et B (mobile), de même masse m , et de charges respectives q_A et q_B . On considère la particule A comme étant fixe, et on suppose que la force de Coulomb est la seule à prendre en compte pour étudier le mouvement de B. La distance initiale entre les deux particules est notée a.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb exercée sur B par la particule A et établir l'énergie potentielle dont elle dérive.
2. On suppose$q_A = q_B = q$. On lance la particule B en direction de la particule A avec une vitesse v_a . À quelle distance minimale B peut-elle s'approcher de A ? Pour analyser la situation qualitativement, on pourra commencer par tracer un graphe d'énergie potentielle.
3. On suppose maintenant $q_A = -q_B = q$. Quelle vitesse minimale faut-il donner à B pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ? Là encore, on pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

Réponse : amélie creux

3 Problèmes

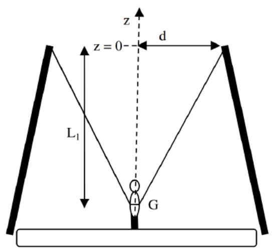
Pb1 : Résoudre par vous-même

Une bille M de masse peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un support circulaire vertical de rayon R . On la lance avec la vitesse horizontale v_c au point le plus bas du cercle.

Question 1 : Déterminer la condition pour que la bille ne quitte jamais le cercle.

Pb2 : Le trampoline à élastique (difficile)

Un enfant de masse $m = 30\,\text{kg}$ est attaché au moyen d'un harnais à deux filins élastiques. Sa position est repérée par celle de son centre d'inertie G. Le système est réglé de façon à ce que la tension des filins compense le poids de l'utilisateur lorsqu'il se trouve au niveau du tapis de sol. (voir figure). Les fi- lins élastiques sont modélisés comme des ressorts de raideur k, de longueur à vide d.



1. Calculer la raideur k, à partir des données suivantes : $d = 2\,\text{m}$; $L_1 = 8,0\,\text{m}$; $g = 10\text{m/s}^2$.
2. Former l'équation différentielle décrivant le mouvement.
3. Cette équation différentielle n'étant pas linéaire, son intégration n'est pas envisageable sans méthode numérique. Montrer qu'elle se linéarise sous la forme :
$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = 0 \tag{1}$$
si l'on néglige d dans l'expression. Discuter la validité de cette approximation.
4. L'enfant, reposant sur le tapis de sol, donne une impulsion qui lui communique quasi instantanément une vitesse v_i dirigée vers le haut. À partir de l'équation différentielle obtenue en 3, déterminer la loi horaire $z(t)$. A quel instant t_h l'enfant atteint-il le point le plus haut ? Calculer alors l'altitude maximale atteinte z_h.
5. Exprimer l'énergie potentielle du système. Comment calculer sans l'approximation du 3 , et sans recourir à une intégration numérique, la valeur de z_h ?

Réponse :

1. A l'équilibre la force de rappel compense le poids donc $mg = 2k(\sqrt{L_1^2+d^2} - d) \Rightarrow k = \dfrac{mg}{2(\sqrt{L_1^2+d^2}-d)} = 20.7\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

2. $m\ddot{z} = -mg = 2k(l-d)$ et $l = \sqrt{z^2+d^2}$.

3. $m\ddot{z} \sim -mg - 2kz$ si $d \ll z$.

4. L'équation précédente est celle d'un oscillateur harmonique de solution $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + B$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$, les conditions initiales + solution particulière conduisent à

$$z(0) = A\cos\phi + B = -L_1\ ;\ \dot{z}(0) = -A\omega_0 \sin\phi = v_i\ ;\ B = -\frac{mg}{2k}$$

Les solutions du système précédente ne sont pas évidentes... astuce faire le rapport des deux équations :

$$\frac{-A\omega_0\sin\phi}{A\cos\phi} = \frac{v_i}{-L_1 + mg/2k} \Rightarrow \tan\phi = -\frac{v_i/\omega_0}{-L_1 + mg/2k}$$

avec $A = -\dfrac{v_i}{\omega_0 \sin\phi}$

$$z_h = A\cos(\pi+\phi) + B = -\frac{v_i}{\omega_0\sin\phi}(-\cos\phi) - \frac{mg}{2k} = -\frac{v_i}{\omega_0}\frac{1}{\tan\phi} - \frac{mg}{2k} = L_1 - \frac{mg}{k}$$

L'enfant atteint le sommet de la trajectoire en t_h tel que $\dot{z}(t_h) = 0$ donc $t_h = \pi/\omega_0 - \Phi/\omega_0$. L'altitude associée est

$$z_h = z(t_h) = A\cos(\pi - \phi + \phi) + B = \frac{v_i}{\omega_0\sin\phi} - \frac{mg}{2k}$$

Or $\sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi}$ et $\tan^2 X = ... = \dfrac{1}{\cos^2 X} + 1$ donc $\sin\phi = \sqrt{\dfrac{\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}} = ... = \sqrt{\dfrac{v_i^2}{\omega_0^2(L_1 - mg/2k)^2 + v_i^2}}$ donc

$$z_h = \frac{v_i}{\omega_0\sin\phi} - \frac{mg}{2k} = ... = \sqrt{\left(L_1 - \frac{mg}{2k}\right)^2 + \frac{v_i^2}{\omega_0^2}} - \frac{mg}{2k}$$

5. $E_p = mgz + k\left(\sqrt{z^2+d^2} + d\right) + E_0$. Toutes les forces présentes sont conservatives donc

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_p = -\Delta E_c \Rightarrow mgz_h + k\left(\sqrt{z_h^2+d^2} + d\right) - mg(-L_1) + k\left(\sqrt{(-L_1)^2+d^2} + d\right) = \frac{1}{2}mv_i^2$$

Donc $mgz_h - k\sqrt{z_h^2+d^2} = \dfrac{1}{2}mv_i^2 - mgL_1 - k\sqrt{L_1^2+d^2}$