TD : Énergétique du point matériel

1 Applications directes du cours

App1 : Distance de freinage

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de $v_0 = 130\,\mathrm{km/h}$. On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route. On rappelle que la réaction de la route se décompose en une composante normale R_N et une composante tangentielle R_T de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie $R_T = fR_N$ en notant f le coefficient de frottement. Il faut $D_0 = 500\,\mathrm{m}$ pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'aucune force de freinage ne s'exerce.

1. Calculer la distance de freinage D si la vitesse initiale était de $v_0' = 110\,\mathrm{km/h}$.
2. Le résultat est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale (la voiture montant ou descendant la pente) ?

App2 : Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin. Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.
On note $l_0 = 2m$ la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est $l = 50\,\mathrm{cm}$. On supposera que le Marsupilami pèse 50 kg et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure l_c .

1. Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$.
2. Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

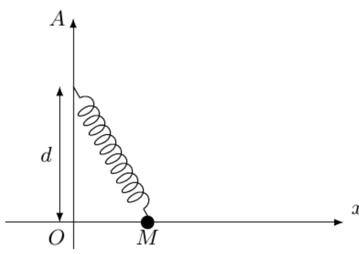
App3 : Le skieur

Un skieur pesant 70 kg descend une piste rectiligne longue de 50 m et inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction $\overrightarrow{R}$ de la piste, qui se décompose en une composante normale N perpendiculaire à la piste et une composante tangentielle T colinéaire et de sens opposé à la vitesse. Les normes de ces deux composantes sont liées entre elles par la loi de Coulomb, $T = \mu N$, avec $\mu = 0.1$.

1. Faire un schéma de la situation en représentant les différentes forces.
2. Exprimer le travail des trois forces au cours de la descente.
3. En admettant que le skieur part du haut de la piste sans vitesse initiale, appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer sa vitesse en bas de la piste.

2 Exercices

EX1 : Ressort et bifurcation



Un point matériel M de masse m se déplace sans frottements le long d'un axe horizontal Ox (perle enfilée sur Ox). Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort sans masse de longueur à vide l_0 et de raideur k, à un point situé à la verticale de O tel que $OA = d$. On note $l = AM$ la longueur du ressort à un instant t. On néglige les frottements.

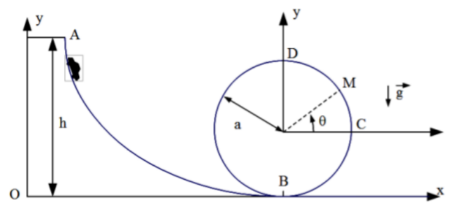
1. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(x)$ de M . On choisira comme référence $E_p(x = 0) = 0$.
2. Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et discuter de sa (leur) stabilité. On se placera dans les cas où $d > l_0$ et $d < l_0$. Vérifier la cohérence de vos résultats par une analyse qualitative.
3. Proposer un code python permettant de tracer l'énergie potentielle en fonction de x.

EX2 : Arrêt d'un navire

La force de résistance $\overrightarrow{F}$ exercée par l'eau sur certains modèles de navires et pour des vitesses v comprises entre 10km/h et 20km/h est une fonction du type : $F = -k.v^3$.

1. Donner la valeur numérique de la constante k sachant que la vitesse limite atteinte par le navire est de 10km/h lorsque le moteur fournit une puissance propulsive P = 4 MW.
2. Le moteur est coupé alors que le navire de masse 12000 t se déplace à une vitesse $v_1 = 16\,\text{km/h}$. Calculer la valeur numérique de la durée t_0 nécessaire pour que la vitesse du navire tombe à la valeur $v_2 = 13\,\text{km/h}$.

EX3 : Looping



Une voiture de manège de masse $m = 24$kg est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon a=4,7m de la figure ci-dessous. La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$.
h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

1. Exprimer la vitesse v_B en B de la voiture en fonction de g et h.
2. Exprimer la vitesse $v_M(\theta)$ en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

   On considère maintenant la possibilité de décollage. Soit $\overrightarrow{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.
3. Exprimer $\overrightarrow{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.
4. Pour quel point M_0 du cercle la norme de R est-elle minimale ?
5. Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.
6. Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la voiture exerce sur les rails une force au moins égale au quart de son poids. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.

EX4 : Particules chargées

On considère deux particules chargées A (fixe) et B (mobile), de même masse m , et de charges respectives q_A et q_B . On considère la particule A comme étant fixe, et on suppose que la force de Coulomb est la seule à prendre en compte pour étudier le mouvement de B. La distance initiale entre les deux particules est notée a.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb exercée sur B par la particule A et établir l'énergie potentielle dont elle dérive.
2. On suppose$q_A = q_B = q$. On lance la particule B en direction de la particule A avec une vitesse v_a . À quelle distance minimale B peut-elle s'approcher de A ? Pour analyser la situation qualitativement, on pourra commencer par tracer un graphe d'énergie potentielle.
3. On suppose maintenant $q_A = -q_B = q$. Quelle vitesse minimale faut-il donner à B pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ? Là encore, on pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

3 Problèmes

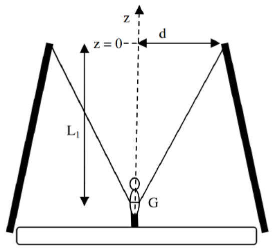
Pb1 : Résoudre par vous-même

Une bille M de masse peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un support circulaire vertical de rayon R . On la lance avec la vitesse horizontale v_c au point le plus bas du cercle.

Question 1 : Déterminer la condition pour que la bille ne quitte jamais le cercle.

Pb2 : Le trampoline à élastique (difficile)

Un enfant de masse $m = 30\,\text{kg}$ est attaché au moyen d'un harnais à deux filins élastiques. Sa position est repérée par celle de son centre d'inertie G. Le système est réglé de façon à ce que la tension des filins compense le poids de l'utilisateur lorsqu'il se trouve au niveau du tapis de sol. (voir figure). Les fi- lins élastiques sont modélisés comme des ressorts de raideur k, de longueur à vide d.



1. Calculer la raideur k, à partir des données suivantes : $d = 2\,\text{m}$; $L_1 = 8,0\,\text{m}$; $g = 10\text{m/s}^2$.
2. Former l'équation différentielle décrivant le mouvement.
3. Cette équation différentielle n'étant pas linéaire, son intégration n'est pas envisageable sans méthode numérique. Montrer qu'elle se linéarise sous la forme :
$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = 0 \tag{1}$$
si l'on néglige d dans l'expression. Discuter la validité de cette approximation.
4. L'enfant, reposant sur le tapis de sol, donne une impulsion qui lui communique quasi instantanément une vitesse v_i dirigée vers le haut. À partir de l'équation différentielle obtenue en 3, déterminer la loi horaire $z(t)$. A quel instant t_h l'enfant atteint-il le point le plus haut ? Calculer alors l'altitude maximale atteinte z_h.
5. Exprimer l'énergie potentielle du système. Comment calculer sans l'approximation du 3 , et sans recourir à une intégration numérique, la valeur de z_h ?