

TD : Filtrage

1 Applications directes du cours

Pour tous les filtres suivants donner le comportement qualitatif du filtre et en déduire sa nature. Trouver ensuite sa fonction de transfert.

App1 Filtre 1

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

App2 Filtre 2

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

App3 Filtre 3

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{U_s U_i}{U_i U_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}}$$

avec $Z_{eq} = "C \parallel (R + C)" = \frac{1 + jRC\omega}{2jRC\omega - RC^2\omega^2}$ donc

$$\underline{H} = \dots = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

App4 Filtre 4

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

App5 Filtre 5

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{eq}}{R_1 + Z_{eq}}$$

avec $Z_{eq} = "C \parallel R_2" = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$ donc

$$\underline{H} = \dots = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega}$$

App6 Filtre 6

On a deux dipôles équivalents identiques

$Z_{eq} = "R \parallel C" = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ donc

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + Z_{eq}} = \frac{1}{2}$$

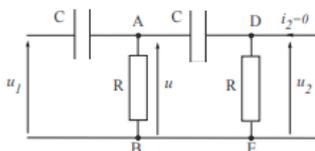
App7 : Effet d'un filtrage

- Pulsation en entree $\omega = 0,01\omega_0$ conserve son amplitude ($GdB(-2) = 0$) et voit sa phase modifiée de $-0,2$.
Pulsation en entree $\omega = 0,001\omega_0$ conserve son amplitude ($GdB(-3) = 0$) et voit sa phase est inchangée.
Le signal en sortie s'écrit $s(t) = E1\cos(0,01\omega_0t - 0,2) + E2\cos(0,001\omega_0t)$
- Pulsation en entree $\omega = \omega_0/100$ conserve son amplitude ($GdB(-2) = 0$) et voit sa phase modifiée de $-0,2$.
Pulsation en entree $\omega = 100\omega_0$ voit son amplitude fortement réduite ($GdB(2) = -35$ i.e. l'amplitude est diminuée d'un facteur 10^{35} !!! Autant dire que cette composante spectrale est totalement coupée par ce filtre.)

App8 : Filtre du premier ordre

- Quand $\omega \rightarrow 0$ alors $u_s = \frac{R}{\alpha R + R} u_e$, et quand $\omega \rightarrow +\infty$ alors $u_s = 0$
- Utiliser les impédances complexes équivalentes : $Z = \frac{1}{1 + jRC\omega}$; $u_s = \frac{Z}{Z + \alpha R} = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1}{1 + j\frac{\alpha}{1 + \alpha} RC\omega}$
On retrouve l'expression en posant $\omega_0 = 1/RC$
- faire le tracé asymptotique
- il faut calculer l'impédance totale du filtre.

App8 : Cascade de filtres



- Donner la nature du filtre par une étude rapide
- Établir la fonction de transfert H en posant $X = RC\omega$.
- Construire le diagramme de Bode.
- Déterminer la fonction de transfert de l'association de trois cellules CR.

2 Exercices

EX1 : Filtre de Wien

1. Passe-bande

2.

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}(x - \frac{1}{x})}$$

3. $G(x) = \frac{1/3}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}(x - \frac{1}{x})^2}}$ à BF $G(x) \approx x$; à HF $G(x) \approx 1/x$ max en $x=1$, $G(1) = 1/3$. Il s'agit d'un filtre passe-bande comme attendu.

4. On cherche $G(x_c) = G_m/\sqrt{2}$

$$\frac{1}{9}(x_c - \frac{1}{x_c})^2 = 1 \implies (x_c - \frac{1}{x_c}) = \pm 3 \implies x_c = \frac{1}{2}(\pm 3 \pm \sqrt{13})$$

Les deux seules solutions physiques (fréquences positives) sont $x_c = \frac{1}{2}(\pm 3 + \sqrt{13}) = 0,3$ et $3,30$ donc $\Delta x = 3$ et $Q = 1/3$.

5. On peut prendre le problème "à l'envers" et développer l'expression donnée dans l'énoncé ...

$$\underline{H} = \frac{1}{\frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{\omega_1}{\omega_0} + j\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_1\omega_2}{j\omega\omega_0}} = \frac{1}{3 + j\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega}}$$

ce qui conduit à $\omega_1 + \omega_2 = 3\omega_0$ et $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$. On obtient comme solution possible :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\omega_0 ; \omega_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\omega_0$$

6. $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$.

7. $\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + jx}$ passe-bas d'ordre 1 et $\underline{H}_2 = \frac{jx}{1 + jx}$ passe-haut d'ordre 1.

$$\underline{H} = \frac{\omega_0}{\omega_2} \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$$

Basse fréquence $\underline{H} \sim \frac{\omega_0}{\omega_2} \underline{H}_2$ et haute fréquence $\underline{H} \sim \frac{\omega_0}{\omega_2} \underline{H}_1$.

EX2 : Couplage d'un oscilloscope

1. $H = \frac{jR_0C_D\omega}{1 + (C_0 + C_D)R_0\omega} \approx \frac{jR_0C_D\omega}{1 + C_D R_0\omega}$ Le mode AC supprime les basses fréquences.

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{R_0C_D}$ et on mesure cette pulsation.

EX3 : Étude de filtre

1. HF : $s = \frac{R_2}{R_1 + R_2}e$; BF $s = e$ Il s'agit d'un coupe bande.

2. $H = \frac{1/jC\omega + R_2}{(R_1 + R_2) + 1/jC\omega} = \frac{1 + R_2jC\omega}{1 + (R_1 + R_2)jC\omega} = \frac{1 + \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{\omega}{\omega_1}}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C}$

3. Si $\omega \ll \omega_1$ alors $H \approx 1$ et son gain en décibel est nul.

Si $\omega \gg \omega_2$ alors $H \approx \frac{\omega_1}{\omega_2}$

Si $\omega_1 < \omega < \omega_2$ alors $H \approx \frac{\omega_1}{j\omega} \approx 0$ la phase tend vers $-\pi/2$

3 Problème

Pb1 : Fréquence centrale d'un passe-bande (écrit PT 2015)

1 Dans la limite très haute fréquence, $\xi \gg 1$ et la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{A_0}{jQ\xi}$$

donc

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \sim 20 \log \frac{A_0}{Q\xi} = -20 \log \xi + 20 \log \frac{A_0}{Q}.$$

Ainsi l'asymptote haute fréquence a **pour pente -20 dB/décade et pour ordonnée à l'origine $20 \log(A_0/Q)$** . De même, dans la limite très basse fréquence $\xi \ll 1$ la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{A_0}{-j\frac{1}{\xi}}$$

donc

$$G_{dB} \sim 20 \log \frac{A_0 \xi}{Q} = 20 \log \xi + 20 \log \frac{A_0}{Q}.$$

Ainsi l'asymptote basse fréquence a **pour pente $+20$ dB/décade et pour ordonnée à l'origine $20 \log(A_0/Q)$** .

2 Le diagramme asymptotique se trace à partir des équations déterminées précédemment, et l'allure du diagramme réel s'en déduit en calculant la valeur du gain en $\xi = 1$,

$$G_{dB}(\xi = 1) = 20 \log A_0 = -20 \text{ dB}.$$

Diagramme complet tracé figure 11.

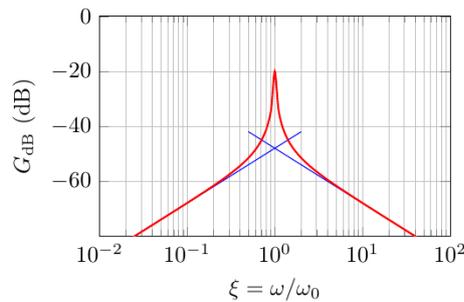


Figure 11 – Diagramme de Bode du filtre. Diagramme asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

3 On conclut à partir du diagramme de Bode que **le filtre est un passe-bande**.

On peut aussi le déterminer par analyse par dipôles équivalents, mais compte tenu de l'ordre des questions le sujet demande probablement d'identifier le diagramme de Bode.

4 L'association parallèle de R , L et C a pour admittance équivalente

$$\underline{Y}_{RLC} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

On reconnaît ensuite un pont diviseur de tension, donc

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_{RLC}}{\underline{Z}_{RLC} + R_0} = \frac{1}{1 + R_0 \underline{Y}_{RLC}}$$

d'où en remplaçant l'admittance \underline{Y}_{RLC}

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + \frac{R_0}{jL\omega} + jR_0C\omega}$$

Pour aboutir à la forme demandée par l'énoncé avec 1 comme terme constant du dénominateur, il faut diviser numérateur et dénominateur par $1 + R_0/R$, soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R_0/R} \frac{1}{1 + \frac{R_0}{jL\omega(1 + R_0/R)} + j\frac{R_0C}{1 + R_0/R}\omega}$$

et en identifiant en fonction des dépendance en ω avec la forme donnée par l'énoncé on trouve

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{1 + R_0/R}} \quad jQ \frac{\omega}{\omega_0} = j \frac{R_0C}{1 + R_0/R} \omega \quad -j \frac{Q\omega_0}{\omega} = \frac{R_0}{jL\omega(1 + R_0/R)}$$

dont on déduit ensuite

$$Q^2 = \frac{R_0C}{1 + R_0/R} \times \frac{R_0}{L(1 + R_0/R)} = \frac{R_0^2}{(1 + R_0/R)^2} \frac{C}{L} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q = \frac{R R_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

et

$$\omega_0^2 = \frac{R_0}{L(1 + R_0/R)} \times \frac{1 + R_0/R}{R_0C} = \frac{L}{C} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5 La fréquence centrale du filtre s'écrit sous la forme

$$f_{\text{osc}} = D C^{-1/2} = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)^{-1/2}$$

En utilisant le développement limité $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ avec $\varepsilon = -|x|/L$ et $\alpha = -1/2$, on trouve

$$f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \left(1 + \frac{|x|}{2L}\right)$$

ce qui est bien de la forme

$$\boxed{f_{\text{osc}} = a|x| + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{D}{2L\sqrt{C_0}} \\ b = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \end{cases}}$$

6 La fréquence de référence f_0 lorsque $x = 0$ vaut

$$f_0 = \frac{D}{\sqrt{C_0}}$$

ce qui permet d'écrire

$$\Delta f = \frac{D}{2L\sqrt{C_0}} |x|$$

On en déduit le déplacement minimal x_{\min} mesurable,

$$\boxed{|x_{\min}| = \frac{2L\sqrt{C_0}}{D} \Delta f_{\min} = 0,2 \text{ mm}}$$