TD : Mouvement à force centrale

1 Applications directes du cours

App1 : Constante des aires

Nous avons établi en cours l'expression de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ à partir de la conservation du moment cinétique. Retrouver ce résultat à partir de la loi de la quantité de mouvement : projeter sur $\overrightarrow{u_\theta}$, multiplier par r, et intégrer.

App2 : Mouvement d'une particule soumise à une force en $1/r^5$

Dans un référentiel galiléen, une particule assimilable à un point matériel M , de masse m, subit une force $\overrightarrow{F} = -k\frac{m}{r^5}\overrightarrow{u_r}$, où k est une constante, $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire constamment dirigée vers un point fixe O tel que $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$ et $r = ||\overrightarrow{OM}||$.

Initialement, la particule est au point A, tel que $OA = R$, et sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$.

1. Établir que si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme.
2. Montrer que la trajectoire ne peut être circulaire que pour $k > 0$.
3. Déterminer la valeur qu'il faut donner à la vitesse initiale pour que la trajectoire soit circulaire, en fonction du rayon R de la trajectoire et de la constante k.

App3 : Satellite géostationnaire

Un satellite est dit géostationnaire quand il est immobile dans tout référentiel lié à la Terre. On donne la masse de la Terre $M_{Terre} = 5,97 \times 10^{24}$ kg, le rayon de la Terre $R_{Terre} = 6378$ kmet la durée du jour sidéral $T = 23h\,56\,min$ (période de rotation de la Terre sur elle-même).

1. Montrer qu'un satellite géostationnaire a obligatoirement sa trajectoire dans le plan équatorial.
2. Calculer le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire.
3. Calculer l'énergie à fournir pour satelliser une masse de 1 kg depuis un point de l'Équateur.
4. Déterminer les latitudes que peut couvrir un satellite géostationnaire et le nombre minimum de satellites nécessaire pour couvrir au mieux la surface terrestre.

2 Exercices

EX1 : Étude du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

On admet dans ce modèle que l'atome d'hydrogène est formé d'un proton immobile et d'un électron qui décrit autour de ce proton une orbitale circulaire de rayon a à la vitesse v.

1. Exprimer les énergies cinétique et potentielle de l'électron en fonction du rayon a de la trajectoire.
2. La condition de Bohr avance que les seules orbites possibles pour l'électron vérifient $L = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}$ où L est le moment cinétique de l'électron et n est un entier. Exprimer le rayon de la trajectoire de l'électron et son énergie totale en fonction de n et des constantes.
3. En déduire le diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer en Joule puis en électronVolt l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène initialement dans son état fondamental.
5. Exprimer la longueur d'onde d'un photon émis lors du passage de l'électron de l'orbitale de rayon a_n à une orbitale de rayon $a_p < a_n$.

Données : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $\hbar = 1,054 \times 10^{-34}$J.s $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}

EX2 : Gravity (CCP)

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

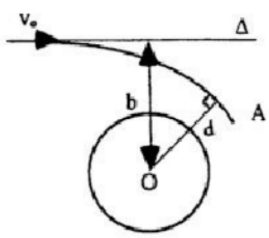
On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre,dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_{Terre} = 6378\,\mathrm{km}$;G est la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
2. En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de G, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.
3. Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

   Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de dis-tance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.
4. Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.
5. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de G, M_0 , m , r_H et r_S.
6. Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H,T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?
7. Quelle est la durée de ce voyage ?

EX3 : Chute d'une météorite

Un météorite de masse m , très loin de la Terre, a une vitesse $\vec{v_0}$ de module v_0 portée par une droite Δ située à une distance b du centre O de la Terre. On suppose que le météorite est soumis uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre - Météorite soit minimale. On note $OA = d$.
On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen. On veut déterminer à partir de quelle valeur de b le météorite s'écrasera sur la Terre. On notera G la constante de gravitation, M la masse de la Terre, supposée sphérique, homogène, de masse volumique ρ, de rayon R.



1. Donner l'expression de la force de gravitation en un point P de la trajectoire tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de la météorite en ce point. On prendra $E_p(\infty) = 0$.
2. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ? Justifier. En déduire que la trajectoire est plane.
3. Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Montrer qu'en A, point de la trajectoire le plus proche de O, la vitesse (de norme v_1) est orthogonale à OA.
4. En vous appuyant sur la question 2, trouver deux relations liant b, d, G, M , v_0 , v_1 . En déduire l'expression de d en fonction de G, M , b, v_0 .
5. Soit R le rayon de la Terre. Quelle condition doit satisfaire b pour que le météorite de vitesse initiale $\vec{v_0}$ rencontre la Terre ?

3 Problème

Pb1 : Mise en orbite d'un satellite géostationnaire

On désire envoyer un satellite météo, de masse m = 400kg sur une orbite géostationnaire d'altitude $h' = 36.10^3$ km.

La mission se divise en 4 étapes :
- Le décollage depuis une base spatiale ;
- une mise en orbite basse circulaire $h = 6.10^2$km ;
- un passage par une orbite de transfert elliptique $a = \dfrac{r_b + r_G}{2}$;
- la mise en orbite géostationnaire définitive $h' = 36.10^3$km.

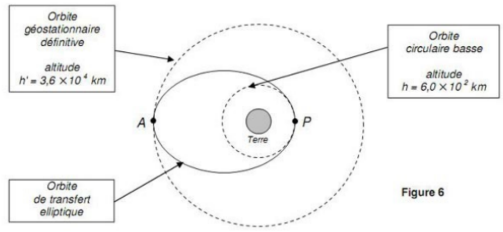
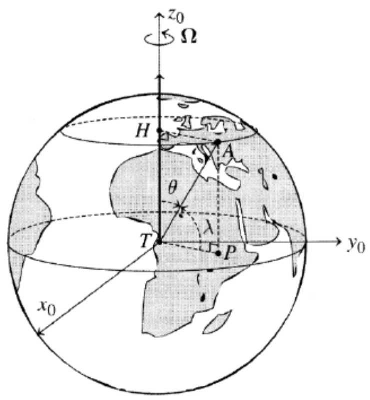


Figure 6

1. Les lanceurs (ou fusées) sont tirés dans l'espace depuis des bases situées à des latitudes variées : Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5°$), Pletsek en Russie ($\lambda_2 = 63°$), Baïkonour dans le Kazakhstan ($\lambda_3 = 46,3°$), Tanegashima au Japon ($\lambda_4 = 30,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_5 = 5,2°$). La fusée étant fixée au sol, calculer la norme v de sa vitesse, par rapport au référentiel géocentrique. La vitesse angulaire terrestre étant $\omega_T = 7,29.10^5$ rad/s autour de son axe sud-nord. Commenter.
2. La Terre exerce une force newtonienne sur le satellite. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite en orbite basse. En déduire le travail que doit fournir la fusée pour mettre en orbite basse le satellite.

   Rappelons que l'énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale newtonienne suivant une trajectoire elliptique est $E_m = \frac{-\kappa}{2a}$. On accélère la fuser afin d'atteindre l'orbite de transfert.
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ de la fusée lorsqu'elle suit l'orbite de transfert. Quelle travail doit fournir la fusée pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
4. Déduire des deux question précédente la différence de vitesse en P pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
5. Le satellite arrive au niveau de l'orbite géostationnaire. Doit-on accélérer ou ralentir le satellite ? Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,g}$ de la fusée lorsqu'elle suit l'orbite géostationnaire. Quelle travail doit fournir la fusée pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. En déduire la différence de vitesse en A pour effectuer ce changement d'orbite.



Pb2 : Descente d'un satellite (CCP)

Un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre à 800 km d'altitude. Sur cet orbite, on constate que son altitude diminue de 1 m durant une période. On décrit les frottements avec l'atmosphère par une force de frottement fluide quadratique $\overrightarrow{f} = \alpha m v \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du satellite et m sa masse. Le coefficient α est supposé indépendant de l'altitude du satellite : $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^{-1}$.

Question 1 : Au bout de combien de temps l'altitude aura-t-elle baissé de 10 km ?

Données : masse de la Terre $M_{Terre} = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $R_{Terre} = 6378$ km