TD : Mouvement à force centrale : Correction

1 Applications directes du cours

App1 : Constante des aires

Le système est un point matériel M de masse m ; qui se déplace par rapport à un référentiel galiléen. Le centre de force est fixe et à l'origine du repère.
M n'est soumis qu'à une force centrale $\overrightarrow{F} = F_r(r)\overrightarrow{u_r}$ dans un repérage polaire de centre le centre de force.
Le PDF donne $m\overrightarrow{a} = F_r(r)\overrightarrow{u_r}$ soit, en terme de composantes $\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F_r(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$

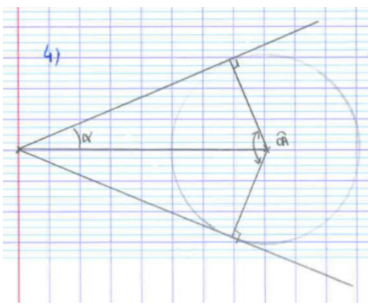
La projection suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ donne :$2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta} = 0$, On identifie cette expression à la forme : $u'v+uv' = 0$ avec $u = r^2$ et $v = \dot{\theta}$, ce qui donne que $r^2\dot{\theta} = cste$.

App2 : Mouvement d'une particule soumise à une force en $1/r^5$

1. PFD appliqué au système en coordonnées polaires et projeté suivant $\overrightarrow{u_r}$: $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{km}{r^5}$. si la trajectoire est circulaire alors $\ddot{r} = 0$ donc $r^6\dot{\theta}^2 = k$. Or le r et k sont constants donc ω (la vitesse de rotation) est constante. Donc le mouvement est uniforme.
2. Si $k < 0$ alors la force est répulsive. Dans ces conditions il n'existe pas d'état lié, en particulier il n'existe pas de trajectoire circulaire. Il est nécessaire d'avoir $k > 0$ pour pouvoir obtenir une trajectoire circulaire.
3. Supposons la trajectoire circulaire et uniforme, alors $v_0 = R\dot{\theta}$, d'après le PFD on a $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{R^6}}$; soit $v_0 = \frac{\sqrt{k}}{R^2}$

App3 : Satellite géostationnaire

1. Toute trajectoire est inclus dans un plan comprenant le centre de la Terre et le vecteur–vitesse initiale du satellite. La trajectoire ne peut qu'avoir lieu dans le plan équatorial car la force centrale est dirigée vers le centre de la Terre.
2. On applique la 3 ème loi de Kepler à un satellite en trajectoire circulaire, $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ soit $r = 42 \times 10^3$ km
3. L'énergie mécanique sur l'orbite géostationnaire s'écrit $Em = \frac{1}{2}mr^2\omega_T^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2r}$ car l'orbite est circulaire (minimum d'énergie). Le satellite est initialement posé à la surface de la Terre donc sont énergie est :$Em = \frac{1}{2}mR_T^2\omega_T^2 - \frac{GMm}{R_T}$. Ainsi la variation d'énergie mécanique pour mettre le satellite en orbite est $\Delta E_m = \frac{1}{2}m(r^2 - R_T^2)\omega_T^2 - GMm(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}) = 55,6 \times 10^6$J
4. On a $\alpha = arcsin(R_T/r)$ or l'angle balayé par le satellite s'écrit $\widehat{OA} = 2(\pi - \alpha - \pi/2) \approx 2,84$ rad soit 162°.Recouvrir la totalité de la surface de la Terre necessite 3 satellites.



2 Exercices

$\boxed{\text{EX1 :}}$ Étude du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(a\omega)^2$ et $E_p = -\frac{\kappa}{a}$ avec $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ issue de l'interaction électrostatique.

2. Calculons le moment cinétique projeté sur l'axe de rotation $\sigma = \vec{\sigma}\vec{e_z} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v})\vec{e_z} = (a\vec{e_r} \wedge ma\omega\vec{e_\theta})\vec{e_z} = ma^2\omega = n\hbar$, donc $\omega = \frac{n\hbar}{ma^2}$.

L'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{\kappa}{a} = \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{m^2a^2} - \frac{\kappa}{a}$ est constante,

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -m\frac{n^2\hbar^2}{m^2a^3}\dot{a} + \frac{\kappa\dot{a}}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{ma^3}{n^2\hbar^2} = \frac{a^2}{\kappa} \Rightarrow a = \frac{n^2\hbar^2}{m\kappa} = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}\,.$$

Alors

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{n^2\hbar^2}{m^2a^4}a^2 - \frac{\kappa}{a} = \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{ma^2} - \frac{\kappa}{a} = \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2m^2\kappa^2}{mn^4\hbar^4} - \frac{m\kappa^2}{n^2\hbar^2} = \frac{1}{2}\frac{m\kappa^2}{n^2\hbar^2} - \frac{m\kappa^2}{n^2\hbar^2} = -\frac{m\kappa^2}{2n^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2 n^2\hbar^2}\,.$$

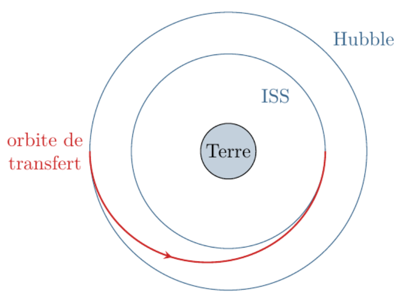
3. Les énergies mécaniques s'écrivent $E_{m,n} = \frac{E_1}{n^1}$ avec $E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -13.6\,\mathrm{eV}$.

4. $E_i = E_\infty - E_1 = 13.6\,\mathrm{eV} = 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

5. $\Delta E_{n,p} = \frac{hc}{\lambda_{np}} \Rightarrow \lambda_{np} = \frac{hc}{E_n - E_p}$.

$\boxed{\text{EX2 :}}$ Gravity (CCP)

1. Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre, $\vec{F} = -\frac{GM_0m}{r^2}\vec{u_r}$ et $E_p = -\frac{GM_0m}{r}$.
2. Pour un système en rotation uniforme, $r = cte$ donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ et $v = r\dot{\theta} = cste$ donc $\ddot{\theta} = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc
$$-m\frac{v^2}{r}\vec{u_r} = -\frac{GM_0m}{r^2}\vec{u_r} \text{ soit } v = \frac{GM_0}{r}$$
Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T , donc $v = 2\pi r/T$ et
$$\frac{4\pi^2r^2}{T^2} = \frac{GM_0}{r}$$
ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire, $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$.
L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_0m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{GM_0}{r} - \frac{GM_0m}{r}$ donc $E_m = -\frac{GM_0m}{2r}$.
3. D'après la troisième loi de Kepler, $\frac{T_s^2}{r_s^3} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$ donc $T_S = T_H(\frac{r_s}{r_H})^{3/2} = 93\,\mathrm{min}$.
,On a par ailleurs : $v_H = \frac{2\pi r_H}{T_H} = 7,6 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$ et $v_s = \frac{2\pi r_s}{T_s} = 7,7 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$.
(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T H).
4. Voir figure 3. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.



Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge.

5. L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_S + r_H$, d'où on déduit$E_m = -\frac{GM_0m}{r_S+r_H}$.
6. À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{apo}^2 - \frac{GM_0m}{r_H} = -\frac{GM_0m}{r_S+r_H} \text{ d'où } v_{apo}^2 = \frac{2GM_0r_S}{r_H(r_S+r_H)}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de M_0G : $v_{apo}^2 = \frac{2r_S\times4\pi^2r_H^3}{r_H(r_S+r_H)T_H^2}$ donc $v_{apo} = \frac{2\pi r_H}{T_H}\sqrt{\frac{2r_S}{r_S+r_H}} = 7,5\times10^3$ m/s.

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème !), $v_{peri} = \frac{2\pi r_S}{T_S}\sqrt{\frac{2r_H}{r_S+r_H}} = 7,7\times10^3$ m/s.

7. Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T transf à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est reliée au demi-grand axe $a = r_S + r_H$ par

$$\frac{T_{transf}^2}{(r_S/2+r_H/2)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0G} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = Ttransf/2 = 47\,\text{min}$

EX3 : Chute d'une météorite

1. $\overrightarrow{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ avec $\overrightarrow{e_r}$ défini comme le vecteur unitaire portant $\overrightarrow{OP}$ et $E_p(r) = -\frac{GMm}{r}$.

2. Le système est soumis à une unique force conservative ainsi l'énergie mécanique se conserve. De plus la force est une force centrale ainsi le moment cinétique du système se conserve.

Le moment cinétique est par définition (du produit vectoriel) perpendiculaire à la vitesse, elle–même tangente à la trajectoire. Le moment cinétique étant constant (norme et direction et sens) alors le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire au moment cinétique.

3. $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

En A, la distance r est minimale ainsi $\dot{r}$ est nulle en A, la vitesse en ce point est donc $\overrightarrow{v}(A) = d\dot{\theta}(A)\overrightarrow{e_\theta}$, le vecteur vitesse est orthogonale à la distance OA.

4. L'énergie mécanique se conserve, ainsi

$$E_m(A) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{d} = E_m(\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0^2 = v_1^2 - 2\frac{GM}{d}\,.$$

Le moment cinétique se conserve, ainsi

$$\sigma(A) = mb^2\omega_A = mbv_0 = \sigma(\infty) = mdv_1 \Rightarrow v_0 = v_1\frac{d}{b}\,.$$

Alors

$$b^2v_0^2 = d^2v_1^2 = d^2\left(v_0^2 + \frac{2GM}{d}\right) \Rightarrow d^2v_0^2 + 2GMd - b^2v_0^2\,;$$

d est solution du polynôme de degré 2 ci–dessus. Finalement, on obtient

$$d = -\frac{GM}{v_0^2} + \frac{\sqrt{G^2M^2 + v_0^4b^2}}{v_0^2}\,.$$

5. La météorite rencontre la Terre si $d \le R_T \Rightarrow ... \Rightarrow b \le \sqrt{\frac{2GMR_T}{v_0^2} + R_T^2}$.

3 Problème

Pb1 : Mise en orbite d'un satellite géostationnaire

1. La vitesse angulaire d'un point à la surface de la Terre s'écrit $v = HA\Omega$. On peut relier la distance HA à la latitude λ par $HA = R_T\cos\lambda$. On a ainsi $v_1 = 408$ m/s ; $v_2 = 211$ m/s ;

$v_3 = 400$ m/s ; $v_4 = 462$ m/s.
Plus le lanceur est proche de l'équateur plus la vitesse de translation au sol est élevée. Il sera plus intéressant d'avoir un lanceur très proche de l'équateur.

2. $E_{m,b} = -\frac{k}{2r_b}$ avec $k = GM_T m$ et $r_b = R_T + h$ le rayon de l'orbite basse.
Pour la mise en orbite, la fusée doit fournir un travail $W = \Delta E = E_{m,b} - E_0 = -\frac{k}{2r_b} - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{k}{R_T}\right)$
3. $E_{m,b} = -\frac{k}{2a}$ avec $2a = r_b + r_g = 2R_T + h + h'$ avec r_g le rayon de l'orbite géostationnaire. Alors $W = \Delta E = E_{m,t} - E_{m,b} = -\frac{k}{2a} + \frac{k}{2r_b}$.
4. En P avant l'accélération, le satellite se trouve sur l'orbite basse, ainsi $E_{m,b} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{k}{r_b}$. Tandis qu'après l'accélération le satellite se trouve sur l'orbite de transfert $E_{m,t} = \frac{1}{2}mv_t^2 - \frac{k}{r_b} = -\frac{k}{2a}$ ce qui donne :
$$v_b^2 = \frac{k}{mr_b} ; v_t^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{k}{r_b} - \frac{k}{2a}\right)$$
Ainsi $\Delta v = v_t - v_b = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k}{r_b} - \frac{k}{2a}\right)} - \sqrt{\frac{k}{mr_b}}$.
5. Question similaire aux questions 3 et 4 ...$E_{m,g} = -\frac{k}{2r_g}$ soit $\Delta E = E_{m,g} - E_{m,t} = -\frac{k}{2r_g} + \frac{k}{2a}$.
Et les vitesses s'obtiennent comme en question 4 mais cette fois au point A ...

Pb2 : Descente d'un satellite (CCP)

Compte tenu de la très faible variation d'altitude au cours d'une période, on peut faire l'approximation que tous les résultats établis pour une orbite circulaire demeurent valables en prenant simplement un rayon r dépendant (lentement) du temps. De façon précise, on suppose $\dot{r} \ll r\dot{\theta}$.

Sur une orbite circulaire de rayon R, la vitesse du satellite vaut

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}{R}}\,\vec{e}_\theta$$

donc la force de frottement s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}}{R}\,\vec{e}_\theta$$

La variation d'énergie mécanique du satellite au cours d'une période est égale au travail de la force de frottement,

$$W = \int_\mathrm{cercle} \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_\mathrm{cercle} \vec{f}\cdot(R\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta)$$

ce qui donne

$$W = -\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\int_\mathrm{cercle}\mathrm{d}\theta = -2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\,.$$

Ainsi, au cours d'une période,

$$\Delta E_\mathrm{m} = -2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T}\,.$$

Par ailleurs, l'énergie mécanique du satellite en orbite circulaire vaut

$$E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2R}$$

et donc

$$\Delta E_\mathrm{m} = \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2R} - \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2(R-\Delta R)} \simeq -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2}\frac{\Delta R}{R^2}$$

en approximant $R(R-\Delta R)\simeq R^2$. Ainsi, au cours d'une période,

$$-2\pi\alpha\mathcal{G}mM_\mathrm{T} = -\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{2}\frac{\Delta R}{R^2} \qquad \text{soit} \qquad \Delta R = 4\pi R^2\alpha\,.$$

Ainsi, pour que l'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 10\,\mathrm{km}$, il faut $\Delta h/\Delta R$ périodes.

Enfin, connaissant le rayon et la vitesse il n'est pas difficile d'estimer la période,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}}\,,$$

et de conclure sur la durée nécessaire pour que l'altitude diminue de Δh,

$$\Delta t = \frac{\Delta h\, T}{\Delta R} = \frac{2\pi R\,\Delta h}{4\pi R^2\alpha}\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_\mathrm{T}}}$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta h}{2\alpha\sqrt{R\mathcal{G}M_\mathrm{T}}} = 62\cdot10^6\,\mathrm{s} \simeq 2\,\mathrm{ans}\,.}$$