TD : Induction

1 Applications directes du cours

App1 : équations couplées

Établir les équations vérifiées par les courants en régime sinusoïdal forcé à partir des équation trouvés en cours :

$$\begin{cases} e_0 & = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ 0 & = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

App2 : Schéma équivalent et équation électrique

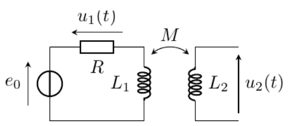
Un circuit électrique filiforme plan de résistance R, d'auto–inductance L et de surface S est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoïdalement dans le temps et orthogonal au circuit : $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.

1. Représenter le schéma équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique. Dans le cas où on néglige l'auto– induction.
2. Reprendre la question précédente en prenant en compte l'auto-induction.

App3 : Calcul de coefficient d'inductance

Soit un grand solénoïde de caractéristiques (N_1, S_1, l_1) dans lequel est placé un petit solénoïde de caractéristiques (N_2, S_2, l_2) dont les axes font un angle θ. Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.

App4 : Induction entre deux bobines



Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\,\Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0\,\text{kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est elle pas applicable telle quelle ici ?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1 .
3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00$ V et $U_2 = 0,50$ V.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

2 Exercices

EX1 : Rail de Laplace tracté

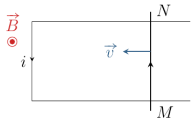


Figure 4 – **Rail de Laplace tracté.**

On considère deux rails de Laplace séparés d'une distance a et soumis à un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B}$. Ces rails sont fermés sur une résistance R. Un opérateur tracte la tige mobile en exerçant une force constante $\overrightarrow{F_0}$.

1. À partir de la loi de Lenz, déterminer le signe du courant i dans le circuit.

2. Établir l'équation électrique et l'équation mécanique du système.
3. En déduire le bilan de puissance et l'interpréter.

EX2 : Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée, de coté $a = 5\,\text{cm}$, d'axe Oz et de rayon moyen $3a/2$ sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre ($N = 10^4$) de spires carrées de cotés a en série.
Ce circuit, de résistance $R = 0,2\Omega$ est fermé sur un ampèremètre de résistance $R_A = 0,3\Omega$. D'autre part, un fil infini, confondu avec l'axe Oz est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_M \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 50$ Hz.
On appellera B le champ champ magnétique total crée par le fil et la pince.
On appellera $i(t) = i_m cos(\omega t)$ le courant circulant dans la pince en régime sinusoïdal forcé.

1. Faire un schéma du dispositif.
2. Justifier que le champ magnétique engendré par le courant parcourant le fil peut se mettre sous la $\overrightarrow{B} = B_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta}$.
Indication : Une invariance (par translation ou rotation) de la distribution de courant entraîne la même invariance pour le champ magnétique engendré. De plus, on se rappellera que les lignes de champs s'enroulent autour des courants.
Vous montrerez en deuxième année que le champ crée en un point M situé dans la section d'une spire carrée du tore s'écrit : $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0(Ni_m+I_M}{2\pi r}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_\theta}$.
3. Déterminer l'expression du flux magnétique total Φ à travers les N spires.
4. En adoptant une représentation complexe, déterminer l'expression du rapport $\frac{i_m}{I_M}$.
5. Que devient le résultat précédent si les eets résistifs sont négligeables devant les effets capacitifs ?

EX3 : Le haut parleur

Un haut-parleur est composé d'un aimant permanent fixe, dont la géométrie permet de produire un champ magnétique radial de norme constante, $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$, représenté par les flèches vertes en traits fins sur la figure 1.

Une membrane est reliée mécaniquement à cet aimant par une suspension appelée le ≪ spider ≫, modélisée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Un châssis mobile cylindrique portant un bobinage de résistance R et de longueur totale ℓ_{bob} (qui tient compte à la fois du rayon du bobinage et du nombre de spires bobinées) peut se déplacer dans l'entrefer de l'aimant. L'ensemble formé par la bobine, le châssis et la membrane est appelé ≪ équipage mobile ≫ du haut-parleur.

Un générateur extérieur impose une tension de commande u, et donc un courant i circule dans la bobine. La membrane est alors mise en mouvement sous l'effet des forces de Laplace, et crée une onde de pression : le son.

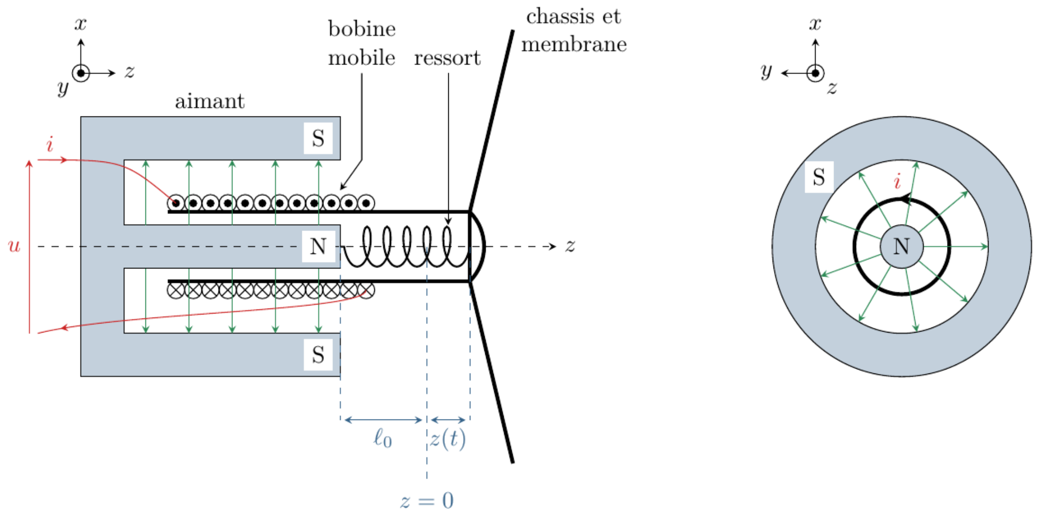


Figure 1 – **Schéma de principe d'un haut-parleur électrodynamique.** Vue en coupe et vue de face d'un haut-parleur simplifié.

1. Montrer que la force de Laplace subie par un tronçon de spire bobinée de longueur infinitésimale $d\ell$ s'écrit $d\overrightarrow{F_L} = -iBd\ell\overrightarrow{u_z}$.
2. En déduire la force de Laplace totale en fonction de ℓ_{bob} .
3. Établir l'équation mécanique du système. On prendra en compte une force de frottements linéaire $\overrightarrow{F} = \alpha\overrightarrow{v}$: que modélise-t-elle ?
4. En exploitant la conservation de la puissance, établir l'expression de la fém induite par le champ extérieur.
5. En déduire l'équation électrique du système.
6. Exprimer l'impédance d'entrée du haut-parleur $Z = U/I$. Montrer qu'elle s'interprète comme la mise en série d'une impédance électrique et d'une impédance mécanique à définir.

EX4 : Moteur synchrone

Considérons un modèle simple de moteur synchrone. Le rotor, de moment magnétique m, tourne avec la même vitesse angulaire ω constante que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ qui l'entraîne. On néglige tout frottement interne au moteur. On s'intéresse à l'angle interne du moteur θ orienté de m vers $\overrightarrow{B}$ et au couple $\overrightarrow{M}$ exercé par le champ sur le moment magnétique. On prendra $B = 0,2\,\mathrm{T}$, $m = 8Am^2$ et une fréquence de rotation de 50 tours par seconde.

1. Proposer un dispositif simple permettant de réaliser le champ magnétique tournant.
2. Que vaut θ si le moteur fonctionne à vide ?
3. Le moteur doit entraîner une charge mécanique qui exerce un couple résistant $M_r = 0,65$ N $\cdot$ m. Calculer l'angle interne et la puissance mécanique fournie par le moteur. D'où provient cette puissance ?
4. La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

3 Problème

Pb1 : Plaque à induction

On cherche dans cet exercice à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction. On assimile le fond de la casserole à cylindre de rayon a, d'épaisseur h et d'axe Oz. La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.
Pour étudier les courant créés dans le fond de la casserole, on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe Oz, d'épaisseur h et de largeur dr.

On admettra que la conductance électrique dG (inverse de la résistance) d'une de ces spires, de rayon r, s'écrit $dG = \frac{h}{2\pi r}\gamma dr$, où γ est la conductivité du métal utilisé.

1. Exprimer le courant élémentaire di induit dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance dG.
2. En déduire la puissance moyenne dP_d dissipée par effet Joule dans une spire.
3. Déterminer alors la puissance totale P_u dissipée dans le fond de la casserole en fonction en fonction de B_0 , ω, h, γ et a.
4. Application numérique : Calculer P_u avec $\gamma = 10^7 Sm^{-1}$, $h = 5\text{mm}$, $a = 10\,\text{cm}$, $B_0 = 0.1\text{T}$ et $\omega = 100\pi.s^{-1}$.

Pb2 : Détection de véhicule par boucle inductive

En milieu urbain, la détection de véhicule par boucle inductive s'est fortement développée. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée, formée de spire de la taille de l'ordre du mètre (dipôle AB parcouru par un courant $i_1(t)$).
Lorsqu'un véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la carcasse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par l'intensité $i_2(t)$.
On note M le coefficient de mutuelle inductance. On négligera la résistance des circuits.

1. Montrer qu'en présence d'un véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L_0 qu'on exprimera en fonction de L_1 , L_2 et M .
2. Cette boucle fait partie d'un montage électronique oscillant dont la pulsation propre est fonction de l'inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB. Quelle est la pulsation de résonance ? Calculer sa variation relative en fonction de la variation relative d'inductance.