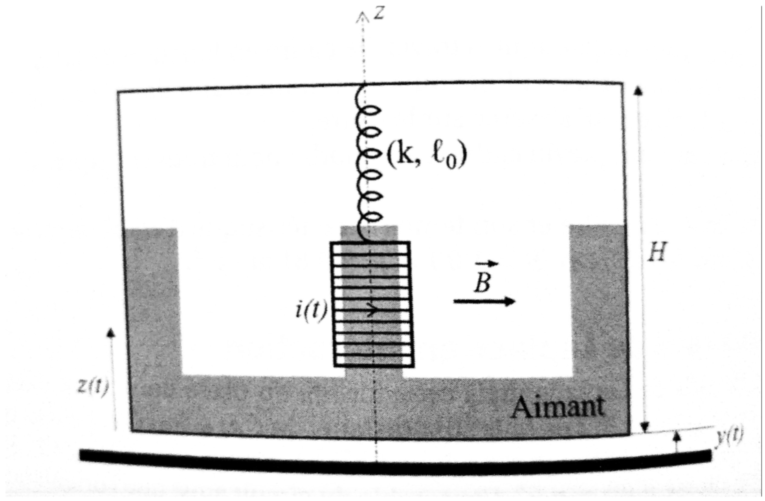
TD : Induction

Exercices complémentaires

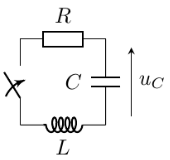
EX1 : Capteur d'un sismomètre

On étudie dans cet exercice, un capteur permettant de remonter au mouvement d'un sismomètre. Ce dernier est composé d'un châssis de hauteur interne H, dans lequel un aimant permanent produit un champ magnétique supposé radial $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_r}$. Une bobine d'axe vertical possédant N spires est maintenue au niveau de son centre de gravité par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Cette bobine entoure l'aimant et peut glisser sans frottement le long de l'axe vertical. On note L son inductance propre et R sa résistance, le circuit est fermé.
On note $z(t)$ la position du centre de gravité de la bobine et $y(t)$ la variable qui décrit le mouvement du sol par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen.



1. Expliquer qualitativement pourquoi un courant induit parcourt la bobine lors d'un séisme.
2. Que peut-on dire du flux magnétique à travers la bobine ?
3. Malgré cela, une force électromotrice apparaît dans la bobine (nous sommes dans un cas où la loi de Faraday n'est pas applicable). Dans ce cas, la force électromotrice due au champ de l'aimant s'écrit :
$$e = \int_{bobine} (\overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$
avec v_e la vitesse du bobinage. Montrer que $e = \ell_b B\dot{z}$ avec ℓ_b la longueur de la bobine.
4. Donner le schéma électrique équivalent de la bobine et en déduire l'équation électrique.
5. Établir l'équation mécanique du système en faisant apparaître $y(t)$ et $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ avec z_{eq} la position d'équilibre du système au repos.
6. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$\ddot{Z} + \frac{iB\ell_b}{m} + \omega_0^2 Z = -\ddot{y}$$
7. On suppose que le séisme est sinusoïdal et donc que $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}}{\underline{y}}$.
8. Étudier le comportement asymptotique du système. Quel type de filtre obtient-on ?

EX2 : RCL série Libre (oral CCP)

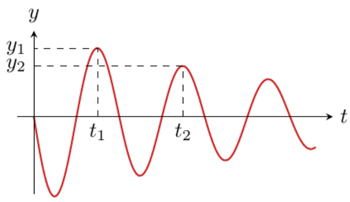


On étudie le circuit ci-contre où le condensateur est initialement chargé : $u_C(t=0) = U_0$.

1 - Déterminer les valeurs de i, de u_C et de u_L à la fermeture du circuit en $t = 0^+$, puis en régime permanent pour $t \to \infty$.

2 - Parmi ces grandeurs, laquelle correspond à y représentée ci-contre ? Comment doit-on procéder pour la mesurer ? Indiquer sur le schéma les branchements de l'oscilloscope.

3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i en fonction de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $m = R/2L\omega_0$.

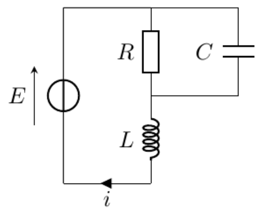


4 - On suppose $m < 1$. Déterminer la solution en fonction de $\Omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$. Que représente Ω ? Comment peut-on l'évaluer à partir de la courbe ?

5 - En utilisant des approximations adéquates, trouver une relation simple entre le rapport y_1/y_2 et m.

6 - Proposer un montage pour compenser l'amortissement.

EX3 : RCL série Libre (oral CCP)



Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

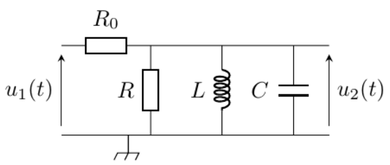
2 - L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3 - Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

4 - Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

5 - En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

EX4 : Fréquence centrale d'un passe-bande (écrit PT 2015)



Le sujet concerne l'étude de capteurs de position reposant sur des effets capacitifs : le déplacement sur un axe x du système d'intérêt modifie la capacité C d'un condensateur, inséré dans le filtre ci-contre. La fréquence centrale de la bande passante du filtre permet de déterminer la fréquence d'oscillation d'un oscillateur non représenté.

Ce filtre a pour fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\xi - \dfrac{1}{\xi}\right)}$$

avec $A_0 = 0{,}1$, $Q = 25$, $\xi = \omega/\omega_0$ et on donne $\log 25 \simeq 1{,}4$.

1 - Donner les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.

2 - Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant le gain en décibel en fonction de $\log \xi$.

3 - Préciser la nature de ce filtre.

4 - Exprimer, à partir du schéma, la fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce filtre. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements x de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi

$$C(x) = C_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$$

avec $C_0 = 10\,\mu\text{F}$ et $L = 10\,\text{mm}$. Ce capteur forme le condensateur. Les composants sont choisis tels que le montage oscille à la fréquence f_{osc}, égale à la fréquence centrale de la bande passante du filtre, liée à la capacité C par la relation

$$f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C}} \qquad \text{avec} \qquad D = 1\text{H}^{-1/2}\,.$$

À la position de référence du capteur ($x = 0$), la fréquence d'oscillation est f_0.

5 - Montrer par un développement limité que pour un petit déplacement x ($|x|/L \ll 1$) la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{\text{osc}} \simeq a\,|x| + b$, et expliciter a et b en fonction des données.

> *Le développement limité à utiliser est le suivant : pour $|\varepsilon| \ll 1$ et α réel,*
>
> $$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon\,.$$
>
> *Compte tenu de l'expression de f_{osc}, on aura ici $\varepsilon = |x|/L$ et $\alpha = -1/2$. À vous de les faire apparaître dans les équations !*

6 - On note $\Delta f = f_{\text{osc}} - f_0$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{\min} = 3\,\text{Hz}$. Quel est le plus petit déplacement détectable ?