

# TD : Induction - Correction -

## 1 Applications directes du cours

### App1 : équations couplées

Voir cours

### App2 : Schéma équivalent et équation électrique

Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit donc  $\Phi_{ext} = \vec{B} \cdot \vec{S} = SB_0 \cos \omega t$ , ce qui génère une force électromotrice extérieure  $e_{ext} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} = SB_0 \omega \sin \omega t$ .

1. En négligeant l'autoinduction le schéma équivalent se résume à une résistance et une source de tension  $e_{ext}$ .
2. La fem complète s'écrit  $e = e_{ext} - L \frac{di}{dt}$  soit pour la loi des mailles :  $e = Ri$  soit  $L \frac{di}{dt} + Ri = SB_0 \omega \sin \omega t$

### App3 : Calcul de coefficient d'inductance

Le grand solénoïde impose un champ magnétique uniforme à l'échelle du petit solénoïde. Alors, on a dans le petit solénoïde (2) :

$$\Phi = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = N_2 S_2 B_1 \cos \theta = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1}}_M \cos \theta i_1$$

### App4 : Induction entre deux bobines

1. Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert, le courant la traversant est donc nul :  $i_2(t) = 0$ . D'après la loi de comportement, on aurait  $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$  ce qui est faux !  
La loi de comportement de la bobine n'est pas applicable ici car elle est établie en ne tenant compte que de l'auto-induction, cf. cours, alors qu'ici il faut également prendre en compte l'induction mutuelle entre les deux bobines L1 et L2.
2. Appuyons-nous sur le schéma électrique équivalent. Avec la loi de Faraday et comme  $i_2 = 0$ , le double effet de l'auto-induction et de l'induction mutuelle est représenté par les générateurs de



f.é.m.

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_1 \text{ et } \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = M i_1 \text{ soit } e_2 = -M \frac{di_1}{dt}.$$

On réalise une loi des mailles dans la maille 2 :  $u_2 = -e_2 = M \frac{di_1}{dt} = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}$ .

3. Le passage en complexe donne en module :  $U_2 = \frac{M}{R} \omega U_1$  soit  $M = 1,3 \text{ mH}$ .
4. Lorsque la bobine 2 est tournée de  $180^\circ$ , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors , et le même calcul que précédemment montre que la valeur de M est inchangée.  
Lorsque la bobine est tournée de  $90^\circ$ , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux mutuel est nettement diminué à courant  $i_1$  fixé, ce qui veut dire que M est plus faible.

Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux mutuel est plus élevé à courant  $i_1$  fixé, donc M est plus grande

## 2 Exercices

### EX1 : Rail de Laplace tracté

1. D'après la loi de Lenz, on sait que la force de Laplace induite s'oppose à  $\vec{F}_0$ . Cette force s'écrit

$$F_L = ia\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = iaB\vec{u}_x$$

Sachant qu'elle doit être dirigée selon  $-\vec{u}_x$  on en déduit que  $i < 0$ .

2.

- ▷ Système : tige mobile de masse  $m$  ;
- ▷ Référentiel : terrestre  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des forces :
  - force de traction  $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$  ;
  - force de Laplace  $\vec{F}_L = iaB \vec{e}_x$  (que  $i$  soit négatif ne change rien).
- ▷ D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_L$$

soit en projetant

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_0 + iaB.$$

- **Équation électrique** : voir figure 1.

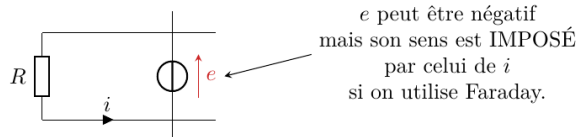


Figure 1 – Schéma électrique équivalent aux rails de Laplace moteur.

- ▷ Calcul de la fém induite :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot (dS \vec{e}_z) = B \iint dS = Bax \quad \text{d'où} \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = -aBv_x$$

- ▷ D'après la loi des mailles,

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad -aBv_x = Ri$$

- 3 La méthode est à retenir :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} v_x = F_0 v_x + iaBv_x & (\text{éq méca} \times v_x) \\ Ri^2 = -aBv_x i & (\text{éq élec} \times i) \end{cases}$$

d'où par somme et réorganisation

$$\underbrace{F_0 v_x}_{\text{MÉCA}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)}_{\text{méca}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{ÉLEC}}$$

La puissance mécanique fournie par l'opérateur permet de mettre en mouvement la tige et le reste est dissipé par effet Joule. En régime permanent ( $v_x = \text{cte}$ ), seul l'effet Joule demeure.

### EX2 : Pince ampèremétrique

1. Le courant circule le long du fil d'axe  $Oz$  alors les lignes de champ s'enroulent autour de l'axe  $Oz$  alors  $\vec{B} = B_\theta \vec{u}_\theta$ . D'autre part la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$  car le fil est unidimensionnel d'axe  $Oz$  alors le champ magnétique est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , i.e.  $B(r, \theta, z) = B(r, z)$ . Le fil est de longueur infinie, la distribution de courant est donc invariante par translation le long de l'axe  $Oz$  alors le champ magnétique est invariant par translation le long de  $Oz$ , i.e.  $B(r, z) = B(r)$ . Ainsi le champ magnétique se réduit à

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta.$$

2. Le tore étant constitué de spires jointives, les lignes de champs sont canalisées d'une spire à l'autre. On peut raisonnablement supposer que le champ magnétique se limitera à une composante sur  $\vec{u}_\theta$ . De plus, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$  donc

$$\vec{B} = B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta.$$

3. Le champ magnétique n'est pas uniforme à l'échelle d'une spire, il faut faire le calcul exact du flux en passant par le flux élémentaire

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0(Ni_m + I_M)}{2\pi r} \cos(\omega t) \times dS,$$

avec  $dS = dr dz$ . Alors le flux s'obtient en intégrant le flux élémentaire

$$\begin{aligned} \phi &= \iint d\phi = \int_a^{2a} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0(Ni_m + I_M)}{2\pi r} \cos(\omega t) dr dz \\ &= \frac{\mu_0(Ni_m + I_M)}{2\pi} \cos(\omega t) \int_a^{2a} \frac{dr}{r} \int_{-a/2}^{a/2} dz \\ &= \frac{\mu_0(Ni_m + I_M)}{2\pi} \cos(\omega t) \ln(2)a. \end{aligned}$$

Le tore étant composé de  $N$  spire, le flux total s'écrit

$$\Phi = N\phi.$$

4. La f.e.m. induite dans le tore s'écrit, d'après la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \underline{e}_0 e^{j\omega t} = -j\omega \Phi = -j\omega N \frac{\mu_0(Ni_m + I_M)}{2\pi} e^{j\omega t} \ln(2)a.$$

Alors le tore est équivalent à un circuit électrique de résistance  $R + R_A$  associé à un générateur de f.e.m. complexe  $\underline{e}$  alors on peut écrire

$$\underline{e}_0 e^{j\omega t} = (R + R_A) \underline{i}_m e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{e}_0 = (R + R_A) \underline{i}_m.$$

Ce qui conduit après quelques calculs à

$$\frac{\underline{i}_m}{\underline{I}_M} = \frac{-j\omega \mu_0 a N \ln(2)/2\pi}{(R + R_A) + j\omega \mu_0 a N^2 \ln(2)/2\pi},$$

5. Si les effets résistifs sont négligeables devant les effets capacitifs alors

$$(R + R_A) \ll |\mu_0 a N^2 \ln(2)/2\pi| \Rightarrow \frac{\underline{i}_m}{\underline{I}_M} \simeq \frac{1}{N}.$$

### EX3 : Le haut parleur

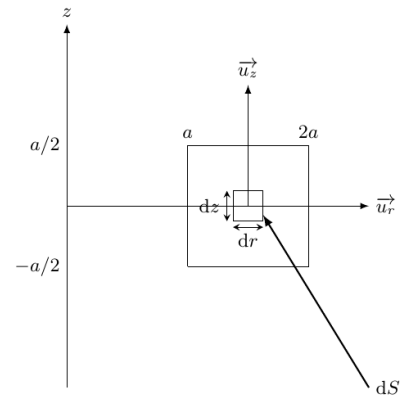
1 Raisonons sur le tronçon de spire représenté figure 2. L'orientation de  $i$  est celle donnée par l'énoncé. La force élémentaire qu'elle subit s'écrit

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(d\ell \vec{e}_\theta) \wedge (B \vec{e}_r) \quad \text{soit} \quad \boxed{d\vec{F}_L = -iB d\ell \vec{e}_z}.$$

Par intégration sur tout le long de la bobine, on en déduit

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} -iB d\ell \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_L = -iB \ell_{\text{bob}} \vec{e}_z},$$

avec  $\ell_{\text{bob}}$  la longueur totale du fil bobiné.



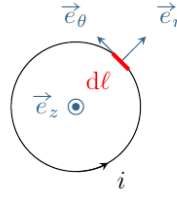


Figure 2 – Une spire du haut-parleur vue de face.

- ▷ Système : équipage mobile ;
- ▷ Référentiel : terrestre  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des forces :
  - le poids est nécessairement compensé par une force de réaction car le mouvement est horizontal ;
  - force de Laplace  $\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}}\vec{e}_z$  ;
  - force de rappel du ressort  $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -kz\vec{e}_z$  ;
  - force de frottement linéaire, qui modélise l'émission du son  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ .
- ▷ D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f,$$

et en remplaçant et en projetant sur  $\vec{e}_z$ ,

$$m \frac{dv_z}{dt} = -iB\ell_{\text{bob}} - kz - \alpha v_z.$$

- 3 La puissance de la force de Laplace s'écrit

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -iB\ell_{\text{bob}}v_z.$$

On en déduit la fém induite,

$$e_{\text{ext}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} \quad \text{soit} \quad e_{\text{ext}} = B\ell_{\text{bob}}v_z.$$

- 4 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 3. D'après la loi des mailles,

$$u + e_{\text{ext}} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad u + B\ell_{\text{bob}}v_z = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

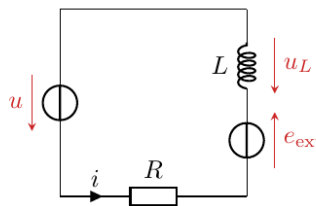


Figure 3 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur.

- 5 D'après l'équation électrique,

$$\underline{V}_z = \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} (R + jL\omega) \underline{I} - \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} \underline{U}.$$

On remplace dans l'équation mécanique multipliée par  $j\omega$  au préalable,

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} [(R + jL\omega) \underline{I} - \underline{U}] = -j\omega\ell_{\text{bob}}B \underline{I}$$

On regroupe alors les termes

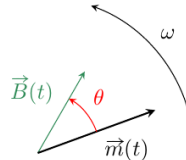
$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) \underline{U} = [(m\omega^2 - j\omega\alpha - k)(R + jL\omega) - j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2] \underline{I},$$

Ce qui donne :

$$Z = \frac{-j\omega(\ell_{bob}B)^2}{m\omega^2 - j\omega\alpha - k} + (R + jL\omega).$$

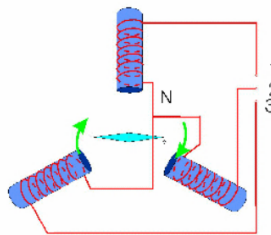
**EX4 : Moteur synchrone**

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 4.



**Figure 4 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.**

**1** On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de  $\pi/2$  et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasés de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 5.



**Figure 5 – Champ tournant généré par trois bobines.** Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

**2** Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique  $\vec{M}$ . D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

On en déduit que  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires, c'est-à-dire  $\theta = 0$ .

**3** Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{m} \wedge \vec{B} + \vec{M}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$mB \sin \theta = M_r \quad \text{soit} \quad \theta = \arcsin \frac{M_r}{mB} = 24^\circ.$$

L'angle  $\theta$  est bien positif, d'une part car il est défini de  $\vec{m}$  vers  $\vec{B}$ , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut  $P = M_r\omega = mB\omega \sin \theta = 205 \text{ W}$ .

Cette puissance provient du générateur électrique qui alimente les bobines produisant le champ tournant.

4) La question précédente montre que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment  $M_r$ ) n'a d'influence que sur l'angle interne  $\theta$  mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour  $\sin \theta = 1$ , soit  $M_{max} = mB = 1,6 \text{ Nm}$ . Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

### 3 Problème

#### Pb1 : Plaque à induction

1. La loi de Faraday s'écrit pour une f.e.m. élémentaire  $de = -d\Phi \times (1/dt)$  et la loi d'Ohm s'écrit  $de = dR \times di$ . Donc on a

$$\begin{aligned} di &= \frac{de}{dR} = dG \times de = \frac{h}{2\pi r} \gamma dr \times \left( -\frac{dB}{dt} \right) \pi r^2 \\ &= \frac{B_0 h \gamma \omega}{2} \sin(\omega t) r dr . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_d &= \langle dR \times (di)^2 \rangle = \left\langle \frac{(di)^2}{dG} \right\rangle = \langle dG \times (de)^2 \rangle \\ &= \frac{h\gamma}{2\pi r} dr (\omega^2 B_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle \pi^2 r^4) \\ &= \frac{h\gamma \omega^2 B_0^2 \pi}{4} r^3 dr . \end{aligned}$$

3.

$$\mathcal{P}_u = \int_0^a d\mathcal{P}_u = \int_0^a \frac{h\gamma \omega^2 B_0^2 \pi}{4} r^3 dr = \frac{h\gamma \omega^2 B_0^2 \pi}{16} a^4 .$$

4.  $\mathcal{P}_u \simeq 970 \text{ W}$ .

#### Pb2 : Détection de véhicule par boucle inductive