TD : Introduction à la thermodynamique

1 Applications directes du cours

App1 : Pression cinétique

On considère un gaz parfait monoatomique dans une enceinte de surface S, composé de N particule.

1. Rappeler les hypothèses sur la vitesse de ce gaz et leur conséquences.
2. Suivant combien de directions peut être projeté le vecteur vitesse d'une particule ? Et combien de sens ? En déduire combien de particules se déplacent selon $+\overrightarrow{u_x}$.
3. Définir la pression d'un gaz sur un élément de paroi $dS\overrightarrow{u_x}$. Exprimer la force exercée par les molécules sur la paroi en fonction de la variation de quantité de mouvement des molécules et de la pression.
4. Calculer la variation de quantité de mouvement d'une particule rebondissant sur la paroi $dS\overrightarrow{u_x}$ sans perte d'énergie.
5. En déduire l'expression de la pression cinétique.

App2 : Gonflage d'un pneu

On assimile l'air à un gaz parfait.

1. L'air est assimilé à un gaz parfait, il vérifie donc initialement la relation $P_iV = nRT_i$, puis après avoir roulé $P_fV = nRT_f$, or la quantité de matière contenue dans le pneu se conserve :

$$T_f = P_f\frac{V}{nR} = \frac{P_f}{P_i}T_i = 321K$$

2. a)
   - L'air dans la bouteille avant gonflage vérifie la relation $P_0V_0 = n_0RT_0$
   - L'air dans la bouteille après gonflage vérifie la relation $P_1V_0 = n_1RT_0$
   - L'air dans le pneu vérifie la relation $P_pV_p = n_pRT_0$

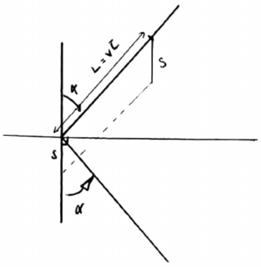
   On cherche la pression dans la bouteille après un gonflage :

$$P_1 = \frac{n_1RT_0}{V_0} = \frac{(n_0 - n_p)RT_0}{V_0} = P_0 - \frac{n_pRT_0}{V_0}$$

   or $n_p = \frac{P_pV_p}{RT_0}$ donc $P_1 = 13,4$ bar

   b) Pour gonfler un pneu il faut que la pression dans la bouteille après gonflage soit supérieure à la pression d'un pneu : $p_n > p_p$. De plus la diminution de pression dû au gonflage d'un pneu est de 1.6 bar. Ainsi on pourra gonfler $n = \frac{15,0-2,6}{1,6} = 7$.

App3 : Pression cinétique de la pluie sur une vitre



1. En un temps τ, ce sont les gouttes comprises dans le volume représenté sur le schéma qui parviendront à atteindre la vitre. Ce volume s'écrit, d'après les données de l'énoncé,

$$V = S \times (v\tau) \times \sin\alpha\,.$$

Ce volume contient un total de particule

$$N = n^* V = n^* \times v\tau \times S \times \sin\alpha\,.$$

2. La variation de quantité de mouvement d'une goutte est horizontale (la vitesse verticale est constante). Une goutte arrive avec une quantité de mouvement horizontale $mv\sin\alpha$ vers la gauche et repart avec une quantité de mouvement $mv\sin\alpha$ vers la droite. Si on note $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire horizontal orienté vers la droite, la variation de quantité de mouvement d'une goutte lors d'un impact s'écrit

$$\Delta\overrightarrow{p} = 2mv\sin\alpha\overrightarrow{u_x} = -\Delta\overrightarrow{p}_{v/g}\,.$$

En un temps τ la vitre reçoit N goutte, elle gagne donc une quantité de mouvement vers la gauche

$$\Delta\overrightarrow{p}_v = N\Delta\overrightarrow{p}_{v/g} = -N2mv\sin\alpha\overrightarrow{u_x}\,.$$

Le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire $\frac{\Delta\overrightarrow{p}_v}{\tau} = \overrightarrow{F}$. Ainsi on peut définir la pression subie par la vitre par

$$p_c = \frac{|F|}{S} = \frac{2n^* mv^2\tau S\sin^2\alpha}{\tau S} = 2n^* mv^2\sin^2\alpha \simeq 0.12\,\text{Pa}\,.$$

App4 : Équilibre diphasé dans une chaudière

1. La quantité d'eau est conservée au cours de la transformation $n_l + n_v = n_0$
   Initialement on a $n_l = \frac{Sh\rho}{M}$ et $n_v = \frac{P_{sat}(T_1)S(L-h)}{RT_1}$.
   Après chauffage on a $n_l = \frac{S(h-x)\rho}{M}$ et $n_v = \frac{P_{sat}(T_2)S(L-h+x)}{RT_2}$
   En égalisant les deux expression de n_0 on arrive à
$$x = \frac{(L-h)(\frac{P_{sat}(T_1)T_2}{T_1} - P_{sat}(T_2))}{P_{sat}(T_2) - \rho RT_2/M} = 0.5cm$$
2. Même chose, on obtient $x = 0.56\,\text{cm}$ Le niveau d'eau ne peut pas baisser autant, il y a rupture d'équilibre.

App5 : Travail reçu le long d'un chemin donné

Un système constitué de n moles de gaz parfait subit une transformation d'un état initial A ($p_1 = 4,0$bars, $V_1 = 10$L, $T_1 = 600$K) vers un état final B ($p_2 = 1,0$bar, $V_2 = 20$L, T_2).

1. Le système vérifie à l'état A la relation $p_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow n_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$ alors la température finale s'écrit

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}T_1 = 300\,\text{K}\,.$$

2. $W_{A\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B} = W_{A\to C}$ car lors d'une transformation iscohore le travail des forces de pression $W = -\int_C^B p_{ext}\text{d}V$ est nul.

Faisons l'hypothèse d'une transformation isobare quasi–statique alors $W = -\int_A^C p_{sys}\text{d}V = -\int_A^C p_1\text{d}V = -p_1(V_2 - V_1) \simeq -4.0\,\text{kJ}$.

3. $W_{A\to B} = W_{A\to D} + W_{D\to B} = W_{D\to B}$ car lors d'une transformation iscohore le travail des forces de pression est nul.

Faisons l'hypothèse d'une transformation isobare quasi–statique alors $W = -\int_D^B p_{sys}\text{d}V = -\int_D^B p_2\text{d}V = -p_2(V_2 - V_1) \simeq -1.0\,\text{kJ}$.

2 Exercices

EX1 : Des voiliers dans l'espace

1. $E = h\nu$ et $p = \hbar k$.
2. Un photon transporte une énergie $E = h\nu$, la densité volumique de photon est n^* alors en un temps τ il arrive un total de $n^*c\tau S$ photons sur une surface S. L'ensemble de ces photon est associé à un flux surfacique d'énergie par unité de temps $J = \frac{h\nu\times n^*c\tau S}{\tau S} = h\nu n^*c$.

3. Considérons des photons arrivant avec une incidence normale à la voile. La quantité de mouvement initiale est $p = \hbar k$ dans un sens puis dans l'autre sens après rebond. Ainsi un photon voit sa quantité de mouvement varier de $\Delta p_p = 2\hbar k$. Ainsi l'ensemble des photon est associé à une variation de quantité de mouvement

$$\Delta p = \frac{JdSdt}{h\nu}\Delta p_p$$

4. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{|\Delta p|}{dt} = |F| = P_v dS \Rightarrow P_v = \frac{|\Delta p|}{dSdt} = \frac{J}{h\nu}2\hbar k = 2n^* c\hbar k = 2n^*\frac{hc}{\lambda} = 2n^* h\nu = 2J/c \approx 10^{-4} Jm^{-3}$$

5. Pour un albedo nul, le photon est absorbé ainsi la quantité de mouvement gagnée par la voile lors d'un impact est divisée par un facteur 2. De ce fait la pression est divisée d'un facteur 2.
6. La force subie est de norme $F = p_v S = 500$ N.

EX2 : Détermination des coefficients C_V , α et ξ_T de la vapeur d'eau

1. Plus un gaz sera dilué, plus il s'approchera du modèle du gaz parfait. Ainsi pour des grands volumes, une courbe isoénergétique correspondra à une courbe isotherme (1[ère] loi de Joule) : les courbes "horizontales" correspondent aux isoénergétiques. Par élimination les autres sont les courbes isobares.

2. Pour les grands volumes, le gaz peut être assimilé à un gaz parfait alors $\Delta U = C_v \Delta T$. Les isoénergétiques sont séparées de 250 J chacune et sont comprises entre 402 et 498K. Ainsi

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} \simeq \frac{10 \times 250}{498 - 402} \simeq 26.6\,\mathrm{J\,K^{-1}}\,.$$

Par lecture de l'isobare la plus à droite on peut écrire, dans le premier cas

$$\alpha = \frac{1}{5 \times 10^{-3}}\frac{0.0056 - 0.0044}{500 - 400} \simeq 2.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}\,.$$

$$\chi_T = -\frac{1}{5 \times 10^{-3}}\frac{0.0040 - 0.0062}{(9 - 6) \times 10^5} \simeq 1.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa^{-1}}\,.$$

Par lecture de l'isobare la plus à droite on peut écrire, dans le second cas

$$C_v = \simeq 26.0\,\mathrm{J\,K^{-1}}\,.$$

$$\alpha = \simeq 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}\,.$$

$$\chi_T = \simeq 0.7 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa^{-1}}\,.$$

EX3 : Gaz parfait dans une enceinte

Une quantité de matière n de gaz parfait est enfermée dans une enceinte de surface de base S. Cette enceinte est fermée par un piston de masse m, à même de coulisser sans frottement, et permet les transferts thermiques, si bien que lorsqu'on attend suffisamment longtemps le gaz contenu dans l'enceinte est en équilibre thermique avec l'extérieur. Le milieu extérieur se trouve à température et pression constantes T_0 et P_0 . On fait subir au gaz la série de transformations suivante.

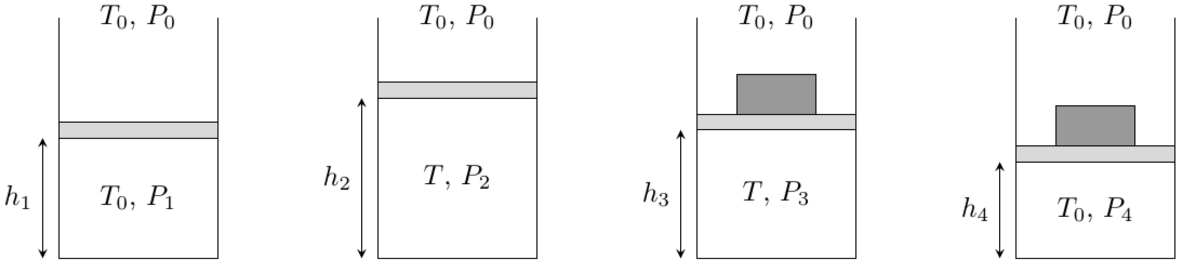
— Initialement, dans l'état (1), le système est au repos depuis suffisamment longtemps pour avoir atteint l'équilibre thermique et mécanique ;

— Le gaz est chauffé jusqu'à ce qu'il atteigne la température $T > T_0$, plaçant le système dans l'état (2) ;

— Une masse supplémentaire M est brusquement placée par dessus le piston : avant tout transfert thermique, le système est dans l'état (3) ;

— Enfin, l'équilibre thermique est atteint, le système est alors dans l'état (4).

Question : Déterminer les quatre positions du piston h_1 à h_4 .



EX4 : Modélisation d'un gaz réel

EX5 : Stockage d'eau chaude

1. Le volume massique moyen de l'eau dans la cuve vaut $v = V/m = 2,010^{-3}$ m^3/ kg . À la température T_0 , le point représentatif M_1 se trouve dans le domaine de coexistence liquide-gaz. La fraction massique de gaz est donnée par le théorème des moments,

$$x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = 1,3 \cdot 10^{-4}$$

avec par lecture graphique le volume massique du liquide $v_\ell = 110^{-3} m^3/$ kg et celui du gaz $v_g = 8,0 m^3/kg$. On en déduit les masses respectives de gaz et de liquide, $mg = 13g$ et $m_\ell = (1 - x_g)m \approx m$. L'eau est presque exclusivement sous forme liquide à cette température.

2. Comme la cuve est indéformable, son volume est constant et donc le volume massique moyen de l'eau dans la cuve est constant aussi. Le point représentatif du système dans le diagramme de Clapeyron est donc à la verticale de M_1 , plutôt dans le domaine liquide (au vu du diagramme, le situer dans le domaine du fluide supercritique ne serait pas aberrant non plus). En utilisant l'équation d'état donnée pour $V = V_0$, on trouve :

$$P = P_0 + \frac{\alpha}{\chi_T}(T - T_0) = 2,1 \cdot 10^3 bar$$

Cette pression est énorme, la cuve ne pourrait pas y résister et exploserait.

3. On raisonne de même avec un volume massique moyen $v_0 = V/m_0 = 0,50$ m^3 / kg . Le point représentatif du système est le point à la verticale de M_2 placé sur le diagramme, le système est alors exclusivement gazeux. On peut lire une pression P_0 de l'ordre de 0,7 MPa, soit environ 7 bar, ce qui est beaucoup plus raisonnable et ne doit pas poser de problème de résistance de la cuve.

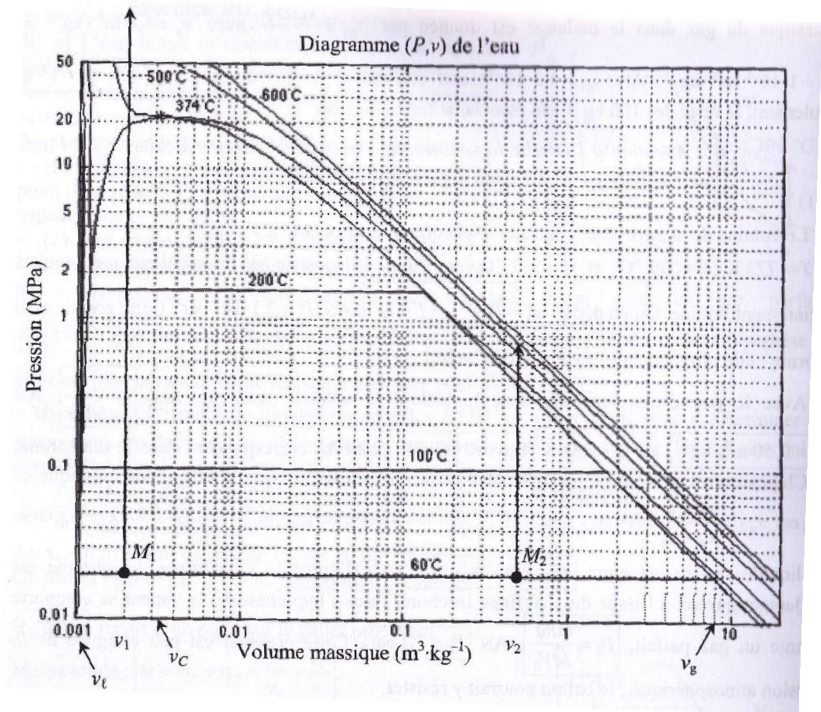


Diagramme de Clapeyron (P, v) de l'eau. Plusieurs isothermes sont représentées pour des températures allant de 60 à 600 ∘ C. Attention, les échelles sont logarithmiques.