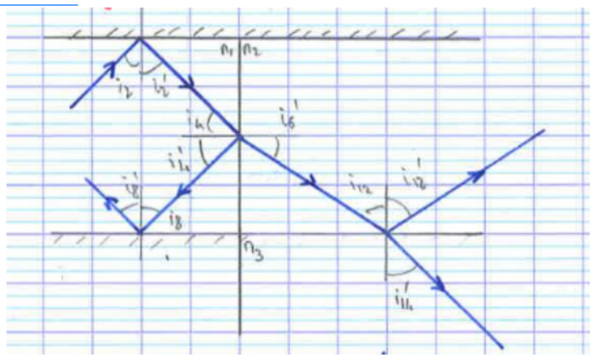
TD : Optique géométrique

1 Applications directes du cours

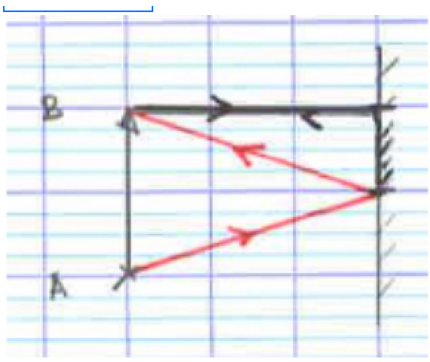
EX1 : Histoire d'angles



1.

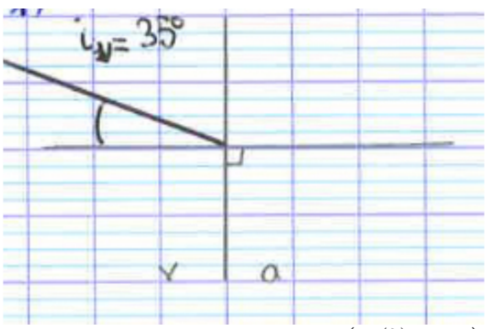
2. $i_2 = i_2'$, $n_1 \sin i_4 = n_2 \sin i_6'$, $i_{12} = i_{12}'$, $n_3 \sin i_{14}' = n_2 \sin i_{12}$, $i_4' = i_4$ et $i_8' = i_8$.

EX2 : Miroir



Miroir de 90cm placé à 90cm du sol.

EX3 : Dispersion



1.

$n_a \sin(i_a) = n_v \sin(i_v)$ or $n_v(\lambda)$: $i_a^\lambda = \arcsin\left(\frac{n_v(\lambda)}{n_a}\sin(i_v)\right)$. Donc $\Delta i = i_a^v - i_a^r = 2.57°$.

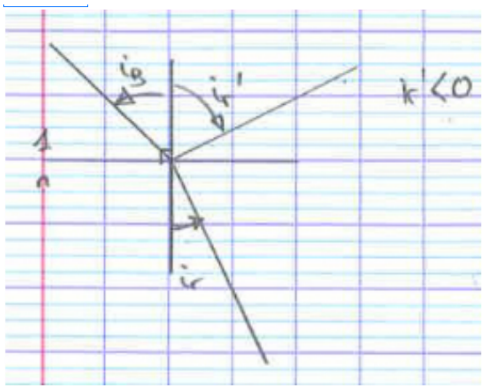
2. Réflexion totale si $i_a = 90° \Leftrightarrow \sin i_a = 1 \Leftrightarrow i_l^\lambda = \arcsin(n_a/n_v^\lambda)$ donc $i_l^r = 38.83°$ et $i_l^v = 37.98°$.

EX4 : Longueur d'onde et couleur

1. $\lambda_0 = c/f$
2. Couleur rouge
3. $v = c/n$

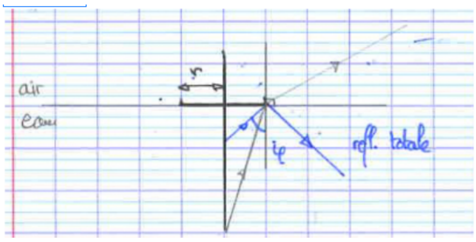
4. Le calcul donne $\lambda = \frac{v}{c} = 3,82 \times 10^{-7}$m, il s'agit du violet.

EX5 : Incidence de Brewster



Réfraction $n_1 \sin i_B = n \sin i_r$, réflexion $i'_r = -i_B$.
On cherche i_B tel que $i_r + \pi/2 - i'_r = \pi$, alors $n_1 \sin i_B = n \sin(\pi/2 + i'_r) = n \sin(\pi/2 - i_B) = n \cos(i_B)$ ce qui conduit à $i_B = \arctan(n_1/n) = \arctan(1/n)$.

EX6 : Flotteur



$n_l \sin i_l = n_a \sin i_a = n_a$ à la limite de la réflexion totale donc $\sin i_l = 1/n_l$.
Or $\sin i_l = \dfrac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$ donc après calcul $h = r\sqrt{n_l^2 - 1}$.

2 Exercices et problèmes

EX7 : Fibre optique

1. i_l tel qu'il y a réflexion totale vérifie $n_c \sin i_l = n_g \sin(\pi/2) = n_g$ donc $i_l = \arcsin(n_g/n_c)$. Il faut donc avoir un angle $i < i_l$ pour avoir réflexion totale.

2. $i < i_l \Leftrightarrow -i > -i_l \Leftrightarrow \pi/2 - i > \pi/2 - i_l \Leftrightarrow \theta > \theta_l$. Or la fonction sin étant monotone croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on a que $\sin\theta > \sin\theta_l$, en appliquant la seconde loi de Snell–Descartes, on trouve comment condition de réflexion totale dans la fibre :

$$\sin\alpha > \sin\alpha_l \Leftrightarrow \alpha > \alpha_l = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n_g}{n_c}\right)\right)$$

3. $ON = n_a \sin\alpha_l = n_c \sin\theta_l = n_c \sin(\pi/2 - \arcsin(n_g/n_c)) = n_c \cos(\arcsin(n_g/n_c)) = n_c\sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

Dispersion dans une fibre à saut d'indice

6. Le rayon lumineux qui traverse le plus rapidement la fibre optique correspond au rayon incident parallèle à l'axe (Ox), c'est-à-dire présentant un angle d'incidence $\theta = 0$ au niveau de l'entrée de la fibre.
Ce rayon parcours une distance L à la vitesse $v = c/n_c$ dans le cœur de fibre. Son temps de parcours est donc $\boxed{T_1 = \dfrac{Ln_c}{c}}$.

7. Le rayon lumineux qui met le plus de temps à traverser la fibre optique est le rayon d'angle d'incidence θ_ℓ à l'entrée de la fibre.

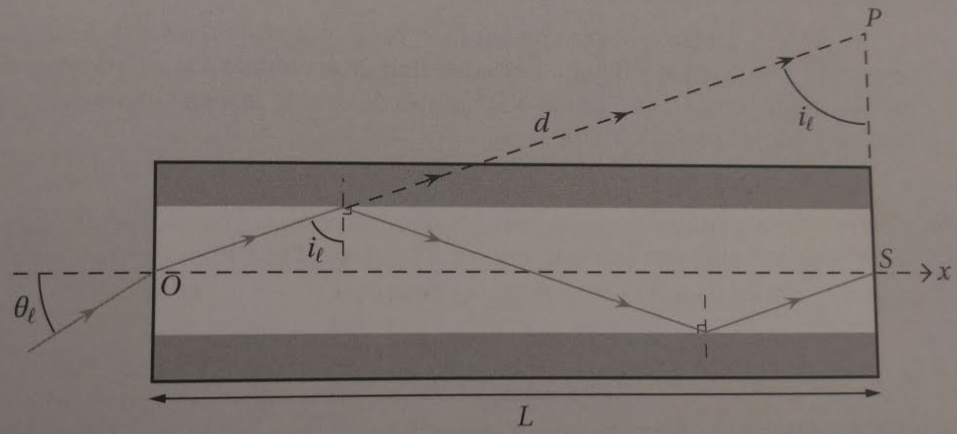


Figure 2.19. Dépliement du trajet effectué par la lumière dans la fibre pour le calcul de T_2.

Afin de calculer la longueur d du trajet effectué par la lumière dans la fibre optique, on peut « déplier » le chemin effectué par le rayon (figure 2.19). Dans le triangle OSP, il vient : $\sin(i_\ell) = \dfrac{L}{d}$ soit $d = \dfrac{L}{\sin(i_\ell)} = \dfrac{Ln_c}{n_g}$. La lumière se propageant à la vitesse $v = c/n_c$ dans le cœu[r] de fibre, la durée de parcours de ce rayon est $T_2 = \dfrac{dn_c}{c}$ soit $\boxed{T_2 = \dfrac{Ln_c^2}{n_g c}}$.

8. La différence de temps de parcours s'écrit :

$$\delta T = T_2 - T_1 = \frac{Ln_c^2}{n_g c} - \frac{n_c L}{c} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta T = \frac{n_c(n_c - n_g)}{n_g}\frac{L}{c} = 3{,}3\ \mu\text{s}}.$$

9. La différence de temps de propagation entre les différents rayons lumineux composant le faisceau incident sur la fibre optique conduit à un étalement temporel des impulsions lumineuses. Comme $\tau \ll \delta T$, la durée d'une impulsion en sortie de la fibre est donnée par δT correspondant à la différence de temps de parcours entre les rayons extrêmes, c'est-à-dire le rayon le plus rapide ($\theta = 0$) et celui dont la durée de parcours est la plus longue ($\theta = \theta_\ell$). L'intensité en sortie de la fibre en fonction du temps est représentée sur la figure 2.20.

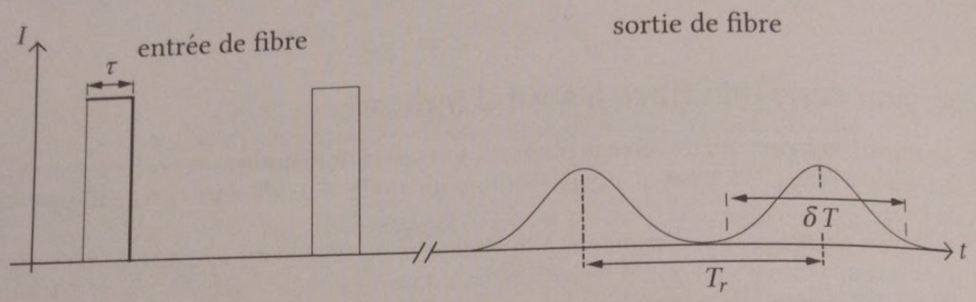


Figure 2.20. Intensité lumineuse en sortie de fibre optique.

Propriété 2.20. Dispersion intermodale d'une fibre optique

Le phénomène d'étalement temporel des impulsions lumineuses lors de la propagation dans une fibre optique est appelée **dispersion intermodale**. Ce phénomène est dû à la différence de temps de propagation entre les différents rayons lumineux compris dans le cône d'acceptance de la fibre.

10. Pour éviter que deux impulsions successives ne se superposent en sortie de fibre, il faut que la durée entre deux impulsions soit supérieure à la durée d'une impulsion en sortie de fibre soit $\boxed{T_{r,\min} \geq \delta T}$. On en déduit le débit maximal de la fibre :

$$\boxed{D_{\max} = 1/T_{r,\min} = 3{,}0 \times 10^2\ \text{kbits} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

11. On a 1 octet = 8 bits donc la taille du fichier est $C = 100$ Mo $= 800$ Mbits. Le temps nécessaire au transfert de ce fichier est donc :

$$\boxed{\Delta T = C/D_{\max} = 2{,}7 \times 10^3\ \text{s} \approx 44\ \text{min}}.$$

Le temps de transfert de ce fichier est très long comparé à ce qui est observé dans la vie courante. Ceci s'explique par le fait que les fibres optiques utilisées en télécommunication ne sont pas des fibres à saut d'indice mais à gradient d'indice. Dans ce type de fibre, l'indice optique varie continûment entre le cœur et la gaine et le rayon lumineux ne se propage pas en ligne droite mais suivant une trajectoire courbée comme pour un mirage. Grâce à cela, l'ensemble des rayons ont quasiment le même temps de parcours dans la fibre ce qui permet donc de réduire l'effet du phénomène de dispersion sur le débit de la fibre.

EX8 : Prisme

1. On établit d'abord les quatre formules du prisme :

(1) $\sin i = n \sin r$ (réfraction en I) (2) $\sin i' = n \sin r'$ (réfraction en J)

(3) $A = r + r'$ (triangle IJK) (4) $D = i + i' - A$.

➪ *Méthode 3.*

La réfraction en I (air-verre) existe pour toute valeur de i. En revanche, en J elle est cond tionnée à la valeur de r' : il faut que $r' \leq r'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour que le rayon émerge en J et r subisse pas de réflexion totale.

La relation (3) impose alors que $r \geq A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ et la relation (1) donne alor $\boxed{i \geq \arcsin\left[n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = i_{\text{min}}}$.

✎ *Les fonctions sinus et arcsinus sont croissantes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc une vale minimale pour un angle correspond à une valeur minimale pour son sinus.*

2. D'après (1), $\sin r = \frac{\sin i}{n} \leq \frac{1}{n}$ donc $r \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si on considère la condition sur r' : $r' \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ ainsi que la relation (3), on en déduit qu est impératif d'avoir $\boxed{A \leq 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = A_{\text{max}}}$ pour que la lumière puisse émerger du prisme.

3. Pour $n = 1{,}5$, $\boxed{A_{\text{max}} = 83{,}6°}$ donc la valeur $A = 60°$ convient.

La condition sur i est alors : $\boxed{27{,}9° \leq i \leq 90°}$.

Scanned by TapScanner

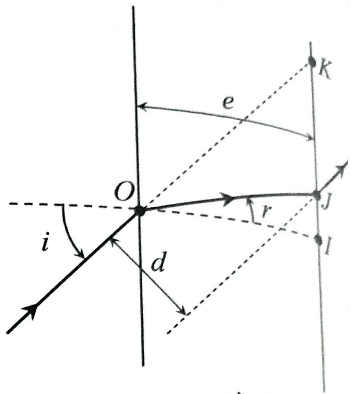
EX9 : Lame à face parallèle

1. Un peu de trigonométrie permet de résoudre ce problème. Il est conseillé de faire un schéma très clair et de nommer les points remarquables : O, I, J et K.
$d = JK\cos i = (IK - IJ)\cos i = e(\tan i - \tan r)\cos i$

$$= e\left[\frac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}} - \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}}\right]\sqrt{1-\sin^2 i}\,.$$

On utilise alors la loi de la réfraction : $\sin i = n\sin r$ d'où

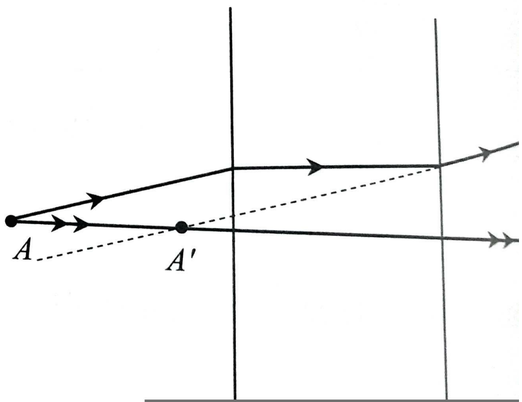
$$\boxed{d = e\sin i\left[1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right]}.$$



⇨ Méthode

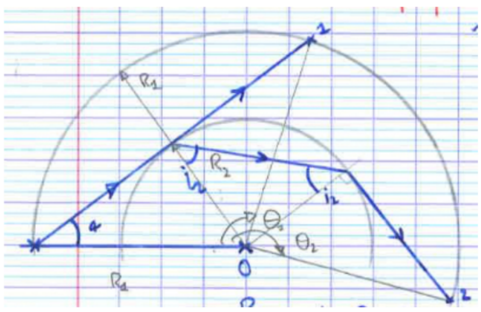
2. AN $\boxed{d = 1{,}54\ \text{mm}}$.

3. Cherchons l'image donnée par la lame d'un point A. Pour cela, on construit le trajet de d[e] rayons issus de A (on choisit l'un des deux orthogonal à la lame par commodité).
Tout d'abord, il faut vérifier le stigmatisme de la lame, c'est-à-dire vérifier que la position d[e] ne dépend pas de l'inclinaison des rayons issus de A.
Ce n'est pas vrai de façon exacte, car la formule précédente dépend de i.
Mais pour i très faible : $\sin i \approx i \ll 1$ donc $d \approx ei\left[1-\frac{1}{n}\right]$. De plus $\sin i = \frac{d}{AA'} \approx i$ donc on trouve $AA' \approx \frac{d}{i} \approx e\left[1-\frac{1}{n}\right]$, qui est indépendant de i : la lame à face parallèle est stigmatique pour les angles faibles.
On constate alors que l'image A' est plus proche de la lame que A. La lame donne donc l'impression de rapprocher les objets.



Scanned by TapScanner

EX10 : Séisme



1. $\lambda = c/f \approx 6000\,\text{m}$, R_1 et $R_2 \gg \lambda$: approximation de "l'optique" géométrique.

2. $n_1 = 1/v_1 = 1.7\times10^{-4}\,\text{s}\,\text{m}^{-1}$ et $n_2 = 1/v_2$ reliés par $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$.

3. $\sin\alpha = R_2/R_1$et $\theta + 2\alpha = \pi$ donc $\theta = \pi - 2\arcsin(R_2/R_1)$.

4. A partir du résultat de la question précédente on peut écrire $R_2 = R_1\sin((\pi-\theta)/2) \approx 2900\,\text{km}$ et donc $p_{\text{noyau}} = R_1 - R_2 \approx 3500\,\text{km}$.

5. On repart de la 2nd loi de Snell–Descartes obtenue question 2, le rayon incident est tangent au noyau $i_1 = \pi/2$ donc $\sin i_2 = v_2/v_1$. Un rayon pénètre dans le noyau et ressort de l'autre coté avec comme angle d'incidence i_2 et donc $i_1' = \arcsin((v_1/v_2)(v_2/v_1)) = \pi/2$.
$\theta_2 = (\pi - (\alpha + \pi/2)) + (\pi - 2i_2) + (\pi - \pi/2 - \arcsin(R_2/R_1)) = 2\pi - \alpha - 2i_2 - \arcsin(R_2/R_1) = 2\pi - 2\arcsin(R_2/R_1) - 2\arcsin(v_2/v_1) = \theta_1 + \pi - 2\arcsin(v_2/v_1)$.

6. et 7. Du résultat précédent on peut obtenir $v_2 = v_1\sin((\pi + \theta_1 - \theta_2)/2) \approx 5.93\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$.