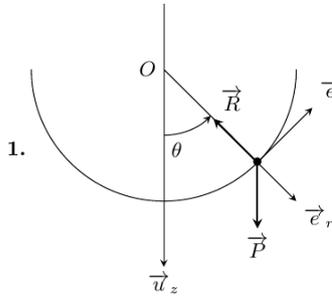


# TD : Solide en rotation autour d'un axe fixe

## Correction

### App1 : Oscillation d'une bille dans une cuvette



1.

Deux forces sont présentes : le poids de la bille, toujours orientée vers le bas, et la réaction de la cuvette sur la bille, toujours orthogonale à la paroi de la cuvette.

La réaction de la cuvette est colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$  ainsi  $\vec{M}_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ .  
Le moment associé au poids quant à lui s'écrit

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) = -Rmg \sin \theta \vec{e}_z ;$$

où  $\vec{e}_z$  est défini pour compléter la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

2. Le moment cinétique en  $O$  de la bille s'écrit

$$\vec{\sigma}_{M,O} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}_{M/O} = R \vec{e}_r \wedge mR\dot{\theta} \vec{e}_\theta = mR^2 \dot{\theta} \vec{e}_z .$$

3. La théorème du moment cinétique appliqué à la bille, calculé par rapport au point  $O$  s'écrit

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O,M}}{dt} = \vec{M}_P \Rightarrow mR^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = -Rmg \sin \theta \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0 .$$

4. On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique, dans le cadre de l'approximation des petits angles, l'équation différentielle précédente devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0 ;$$

on identifie la pulsation propre du système  $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ , la période propre des oscillations s'écrit ainsi  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

### App2 : Pendule simple

Soit la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

1. Moment cinétique du point  $M$  :  $\vec{\sigma}_{M,O} = ml^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ , le moment associé à la tension du fil est nul (car  $\vec{T}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$ ), le moment du poids s'écrit  $\vec{M}_P = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \dots = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$ . Ainsi le TMC s'écrit

$$\frac{d\vec{\sigma}_{M,O}}{dt} = \vec{M}_P \Rightarrow l\ddot{\theta} = -g \sin \theta .$$

2. Le PFD s'écrit

$$m \vec{a}_M = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow m(-l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta - T \vec{e}_r$$

la projection du PFD sur  $\vec{e}_\theta$  conduit à

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta .$$

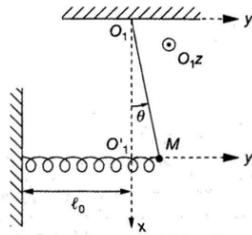
3. La puissance associée à la tension du fil est nulle, car  $\vec{T}$  est orthogonal au mouvement ( $P_T = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$ ), d'autre part la puissance associée au poids s'écrit  $P_P = \vec{P} \cdot \vec{v} = (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot (l\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = -mgl\dot{\theta} \sin \theta$ . Ainsi le TPC s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = P_P \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 \right) = ml\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow l\ddot{\theta} = -g \sin \theta .$$

4. La puissance associée à la tension du fil est nul, d'autre part le poids est une force conservative. On note  $Z$  l'altitude du points  $M$  mesurée par rapport à  $O$  (i.e.  $OZ = l \cos \theta$ ). Ainsi, le théorème de la puissance mécanique s'écrit

$$\frac{dE_p}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 \right) + \frac{d}{dt} (-mgZ) = ml\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\dot{\theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} = -g \sin \theta .$$

### App3 : Oscillations d'un pendule



Ecrivons le moment cinétique et les moments de forces calculés en  $O_1$ .

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{M,O_1} &= \vec{O_1M} \wedge mL\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mL^2\dot{\theta}\vec{e}_z ; \\ \vec{M}_P &= L\vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) = -mgL \sin \theta \vec{e}_z ; \\ \vec{M}_R &= L\vec{e}_r \wedge (-k)O_1M\vec{e}_y = L(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \wedge (-k)(L \sin \theta) \vec{e}_y \\ &= -kL^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_z ; \\ \vec{M}_T &= \vec{0} . \end{aligned}$$

Ainsi le TMC appliqué au point  $M$  et calculé par rapport à  $O$ , projeté sur  $\vec{e}_z$  s'écrit

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - kL^2 \cos \theta \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{k}{m} \sin \theta \cos \theta .$$

Pour des petites oscillations, l'équation précédente devient

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{L} + \frac{k}{m} \right) \theta .$$

On définit la pulsation propre de ce système par  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}}$  et la période des petites oscillations  $T_0 = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}}}$ .

**App4 : Disque en liaison pivot**

1. La liaison étant parfaite, il n'y a a priori aucune perte. Ainsi, la vitesse angulaire restera constante au cours du temps.
2. Ici il apparaît un couple de frottement, écrivons le TMC appliqué à un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe :  $J\dot{\omega} = -\alpha\omega$ , avec  $J$  le moment d'inertie du disque en rotation autour de son axe de révolution. L'équation précédente admet comme solution  $\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = \frac{J}{\alpha}$ .

**EX1 : Portage d'une poutre**

On étudie le système poutre, dans le référentiel terrestre supposé Galiléen. Les forces qui s'appliquent sur le système sont :

- Le poids  $\vec{P}$  au point  $G$
- Les forces  $\vec{F}_L, \vec{F}_M$ .

La poutre n'est pas en rotation ni en mouvement

**Cas 1 :** Le PDF projeté sur  $\vec{u}_y$  nous donne :  $-P + \vec{F}_L + \vec{F}_M = 0$   
 Le TMC appliqué au point  $G$  donne :  $\vec{GM} \wedge \vec{F}_M + \vec{GL} \wedge \vec{F}_L = \vec{0}$  soit en projection sur l'axe  $\vec{u}_z$  :

$$-\ell F_M + d F_L = 0 \text{ d'où } F_M = \frac{d}{\ell} F_L$$

En injectant dans le PDF on a :  $P = (1 + \frac{d}{\ell}) F_L$  soit  $F_L = \frac{Mg}{1 + \frac{d}{\ell}}$ . Donc L porte plus que M!

**Cas 2 :** Le PFD reste inchangé par contre le TMC varie un peu :

$$\begin{aligned} \vec{GM} \wedge \vec{F}_M + \vec{GL} \wedge \vec{F}_L &= \vec{0} \\ -\ell(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \wedge F_M \vec{u}_y + d(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \wedge F_L \vec{u}_y &= \vec{0} \\ -\ell \cos \alpha F_M \vec{u}_z + d \cos \alpha F_L \vec{u}_z &= \vec{0} \end{aligned}$$

Par conséquent cette fois  $F_L = \frac{\ell}{d} F_M$

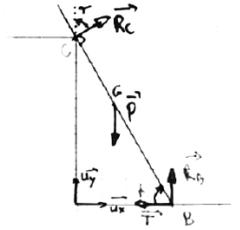
**EX2 : Équilibre d'une échelle**

1. L'échelle subit la réaction du sol en B et C, la tension du fil attaché en B et son poids.
2. L'écriture du PFD ne permet pas de s'en sortir on arrive aux équations

$$R_C \sin \alpha = T ;$$

$$R_C \cos \alpha + R_B = P .$$

Deux des forces présentes s'appliquent en B, les moments calculés en B associés à ces forces sera nul  $\vec{M}_T = \vec{BB} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ , de même pour  $\vec{R}_B$ .



De plus le système est au repos, donc le moment cinétique et sa dérivée sont nuls. Ainsi le TMC calculé en B s'écrit

$$\vec{0} = \vec{M}_P + \vec{M}_{R_C} = \vec{BG} \wedge \vec{P} + \vec{BC} \wedge \vec{R}_C = \frac{L}{2} \cos \alpha mg \vec{u}_z - LR_C \vec{u}_z \Rightarrow R_C = \frac{mg}{2} \cos \alpha .$$

La réaction du sol en C s'écrit

$$\vec{R}_C = \frac{mg}{2} \cos \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y) .$$

3. D'après les relations obtenues grâce au PFD on peut écrire

$$\vec{T} = -\frac{mg}{2} \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_x ; \vec{R}_B = \left( mg - \frac{mg}{2} \cos^2 \alpha \right) \vec{u}_y .$$

### EX3 : Pendule de torsion

1. TMC appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe (ici z) :  $J\ddot{\theta} = -C\theta$ .
2. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0^2 = \frac{C}{J} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ .
3. Oscillateur harmonique.
4.  $P_u = \vec{\Gamma}_e \vec{\omega} = -C\dot{\theta}$  et  $W = \int \delta W = \int P_u dt = -\frac{C}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2)$ .
5. On peut définir  $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$  telle que  $W = -\Delta E_p$ .
6. Système masse/ressort :  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ .
7. TPC :  $\frac{dE_c}{dt} = P_u \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \right) = -C\dot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} = -C\theta$ .

### EX4 : Effondrement du soleil

### Pb1 : Allongement de la durée du jour

1.  $\mathcal{L}_T = J_T \omega_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \omega_T$  et  $\mathcal{L}_L = J_L \omega_L = \frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega_L$ .
2.  $\vec{\mathcal{L}}_{orb} = d_{TL} \vec{e}_r \wedge M_L (d_{TL} \omega_{orb}) \vec{e}_\theta = M_L d_{TL}^2 \omega_{orb} \vec{e}_z$ .
3. 3<sup>ème</sup> loi de Kepler appliqué au mouvement circulaire de la Lune  $\frac{d_{TL}^3}{T_{orb}^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$ .

Alors  $\mathcal{L}_{orb} = M_L d_{TL}^2 \frac{2\pi}{T_{orb}} = 2\pi M_L d_{TL} \sqrt{\frac{GM_T}{4\pi^2 d_{TL}^3}} = M_L \sqrt{GM_T d_{TL}}$ .

4.  $\mathcal{L}_T \simeq 7 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\mathcal{L}_L \simeq 2 \times 10^{29} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \ll \mathcal{L}_T$  et  $\mathcal{L}_{orb} \simeq 3 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

5. On suppose le système Terre-Lune isolé, ainsi les seules forces présentes sont des forces intérieures, on montre aisément que le moment associé est donc nul.

6.  $0 = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \simeq \frac{2}{5} M_T R_T^2 \frac{d\omega_T}{dt} + \frac{1}{2} M_L \sqrt{\frac{GM_T}{d_{TL}}} \frac{dd_{TL}}{dt} = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \frac{\Delta\omega_T}{\Delta t} + \frac{M_L}{2} \sqrt{\frac{GM_T}{d_{TL}}} \frac{\Delta d_{TL}}{\Delta t}$ .

Or  $\Delta\omega_T = \Delta \frac{2\pi}{T_T} = -\frac{2\pi \Delta T_T}{T_T^2}$ . Donc pour  $\Delta t = 1 \times 100 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$  et  $\Delta d_{TL} = 3.7 \text{ m}$  on trouve

$$\Delta T_T = \frac{5}{8\pi} \frac{M_L T_T^2}{R_T^2} \sqrt{\frac{G}{d_{TL} M_T}} \Delta d_{TL} \simeq 1.6 \text{ ms} .$$

**Pb2 : Catamaran de sport**

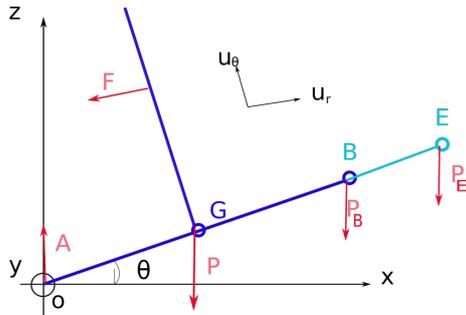
On remarque ici que le bateau est en TRU donc le référentiel associé au bateau est Galiléen. Nous placerons donc notre étude dans ce référentiel.

On nomme  $B$  le barreur et  $E$  l'équipier.

**Traduction de l'énoncé :**

- $Oy$  est l'axe de rotation du système et correspond à la coque qui touche l'eau.
- Soit  $b$  la distance entre l'axe de rotation et  $B$  :  $b = \ell$ . Il est soumis à son poids  $\vec{P}_B$ .
- $E$  est modélisé par un point matériel se situant à une distance  $e = \ell + \ell_e$  de l'axe  $Oy$  avec  $\ell_e = 1,80 - 0,5 = 1,30$  m, il est soumis à son poids  $\vec{P}_E$ .
- La masse du bateau est équitablement répartie entre les deux coques : on considère que le poids du bateau  $\vec{P}$  s'applique au centre d'inertie du bateau  $G$  distant de  $Oy$  de  $d_G = \ell/2$
- On note  $L_M$  la taille du mat.
- Le bateau est à l'équilibre donc le moment cinétique est constant.
- Le système d'étude est l'ensemble formé par les deux marins et le bateau.

**Bilan des forces** On écrit toutes les forces présentes et on projette :



- La poussée d'Archimède :  $\vec{A} = A\vec{u}_z$
- Les trois poids à considérer se mettent sous la forme :  $\vec{P}_i = -P_i(\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)$
- La force Vélique :  $\vec{F} = -F\vec{u}_r$

**Calcul des moments par rapport à l'axe de rotation**

- La poussée d'Archimède :  $M_y(\vec{A}) = 0$
- $M_y(\vec{P}) = -d_G M g \cos\theta$  ;  $M_y(\vec{P}_E) = -em_E g \cos\theta$  et  $M_y(\vec{P}_B) = -bm_B g \cos\theta$
- La force Vélique :  $M_y(\vec{F}) = F \frac{L_M}{3}$

**Application du TMC**

$$0 = 0 - d_G M g \cos\theta - em_E g \cos\theta - bm_B g \cos\theta + F \frac{L_M}{3}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{3}{L_M} (M\ell/2 + em_E + bm_b) g \cos\theta$$

Cette force dépend de  $\theta$  et est liée à la vitesse du vent par rapport au bateau et à l'angle de la voile par rapport à la direction du vent.

On notera que plus le bateau penche, moins le vent n'a d'incidence dessus ce qui diminue  $F$ .

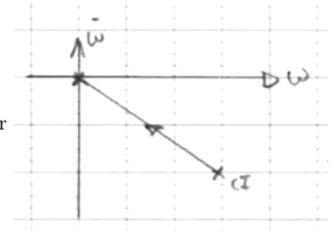
**Pb3 : Étude d'un moteur**

1. Il s'agit d'un couple résistant, alors  $\alpha > 0$ .

2.a. TMC appliqué à un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe :  $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = J\dot{\omega} = -\alpha\omega$ .

2.b. Mettons l'équation sous la forme  $\dot{\omega} = -\frac{\alpha}{J}\omega$ .

Initialement  $\omega(0) = \Omega_0$  et donc  $\dot{\omega}(0) = -\frac{\alpha}{K}\Omega_0$ , après un temps suffisamment long le moteur est à l'arrêt (i.e.  $\omega$  et  $\dot{\omega}$  nuls).



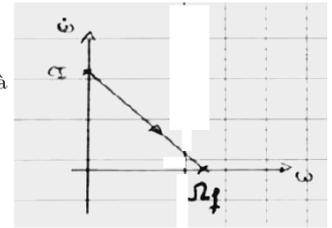
2.c. On a une EDL1 qui admet comme solution  $\omega(t) = Ae^{-t/\tau}$  avec  $\tau = \frac{J}{\alpha}$ . Les conditions initiales donnent  $A = \Omega_0$ .

Si  $J$  augmente alors le temps caractéristique augmente (l'inertie s'oppose à l'arrêt du mouvement); si  $\alpha$  augmente alors le temps caractéristique diminue (le frottement s'oppose au mouvement).

3.a. De même on trouve  $\dot{\omega} = -\frac{\alpha}{J}\omega + \frac{\Gamma_m}{J}$ .

3.b. Initialement  $\omega(0) = 0$  et  $\dot{\omega} = \frac{\Gamma_m}{J}$ , après un temps suffisamment long le moteur tourne à vitesse constante ( $\omega$  cste et  $\dot{\omega}$  nulle).

On a pour un temps suffisamment long  $\dot{\omega} = 0 = -\frac{\alpha}{J}\Omega_f + \frac{\Gamma_m}{J} \Rightarrow \Omega_f = \frac{\Gamma_m}{\alpha}$ .



3.c. Résolution de l'EDL1 ...  $\omega(t) = \frac{\Gamma_m}{\alpha} (1 - e^{-t/\tau})$  avec  $\tau = \frac{J}{\alpha}$ .

3.d.  $\frac{\Omega_f - \omega(t_5)}{\Omega_f} \leq 5/100 \Rightarrow \dots \Rightarrow t_5 \geq -\frac{J}{\alpha} \ln(5 \times 10^{-2})$ .

4.a Le régime transitoire a un temps caractéristique identique aux situations précédente  $\tau = \frac{J}{\alpha}$ .

4.b L'EDL1 devient ici  $\dot{\omega} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} (1 + r \cos(\Omega t))$ . On injecte (en passant au complexe) l'expression de la vitesse de rotation  $\underline{\omega} = \omega_f + Ae^{j(\Omega t - \phi)} = \omega_f + \underline{A}e^{j\Omega t}$  pour un forçage  $\Gamma_0 + \Gamma_0 r e^{j\Omega t}$ , sachant que  $\omega_f$  vérifie l'équation à forçage constante. Alors il reste

$$\underline{A} \left( j\Omega + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{\Gamma_0}{J} r = \frac{\Omega_f}{\tau} r \Rightarrow \underline{A} = \frac{r\Omega_f}{1 + j\Omega\tau}$$

Alors  $A = |\underline{A}| = \frac{r\Omega_f}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau^2}}$  et  $\phi = \arg(\underline{A}) = -\arg(1 + j\Omega\tau)$  donc  $\tan \phi = -\Omega\tau$ .

4.c Un volant d'inertie augmente  $J$  donc augmente  $\tau$  (ce n'est pas ce qui nous intéresse) mais diminue  $A$  l'amplitude des vibrations.