TD : Solide en rotation autour d'un axe fixe

1 Applications directes du cours

App1 : Oscillation d'une bille dans une cuvette

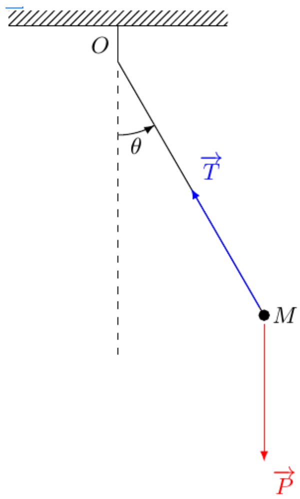
Une bille M de masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon R. On note $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{u_z}$ (la direction verticale orientée vers le bas) et $\overrightarrow{OM}$. La bille est initialement lâchée sans vitesse et d'un angle θ_0 puis effectue des oscillations.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille, puis calculer le moment de chacune en O.
2. Exprimer le moment cinétique en O de la bille en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.
3. En appliquant le théorème du moment cinétique à la bille, trouver son équation du mouvement.
4. En déduire la période T des petites oscillations.

App2 : Pendule simple

Un point matériel M de masse m est accroché au bout d'un fil inextensible de longueur l. L'autre extrémité du fil est fixe dans le référentiel de l'observateur. On choisit comme repère un repère polaire d'origine O, extrémité fixe du fil. À $t = 0$, le point est lâché sans vitesse initiale d'un angle θ_0.
Établir l'équation différentielle vérifiée par le pendule à l'aide :

1. du théorème du moment cinétique
2. du principe fondamentale de la dynamique
3. du théorème de la puissance cinétique
4. du théorème de la puissance mécanique.



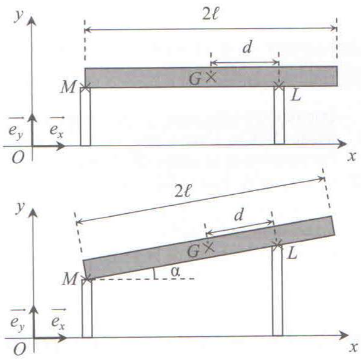
App3 : Disque en liaison pivot

1. Considérons un disque en liaison pivot parfait autour de l'axe Oz. Ce disque est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0 . Évaluer l'évolution de la vitesse angulaire.
2. La liaison pivot n'est plus parfaite et engendre un couple de frottement $C = -\alpha\omega$, où α est une constante positive. Évaluer l'évolution de la vitesse angulaire.

2 Exercices

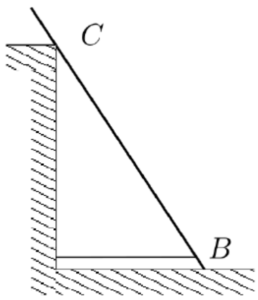
EX1 : Portage de poutre

Les deux charpentiers Mario et Luigi portent ensemble une poutre, de longueur $2l = 4,0\,\mathrm{m}$ et de masse m=30kg. Mario est à une extrémité M de la poutre, Luigi étant au point L à une distance $d = 1,4\,\mathrm{m}$ du milieu de la poutre. Les deux forces qu'ils s'exercent sur la poutre sont verticales.



1. On suppose tout d'abord que les deux charpentiers ont la même taille, la poutre étant maintenue horizontale, exprimer la valeur des forces $\overrightarrow{F_M}$ et $\overrightarrow{F_L}$.
2. En fait Mario est plus petit que Luigi, la poutre faisant alors un angle α avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales. Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.

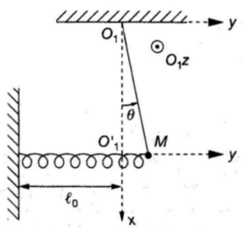
EX2 : Équilibre d'une échelle



Une échelle de masse m et de longueur $BC = L$ est posée contre un mur. Un fil inextensible maintient, au point B, son extrémité inférieure (on confond B avec le point de contact de l'échelle sur le sol, et le point C avec le point de contact de l'échelle sur le coin du mur). On note θ l'angle entre l'échelle et le sol et on néglige tous les frottements.

1. Détailler les forces subies par l'échelle. Préciser graphiquement leur sens et leur direction.
2. Quelle loi de la mécanique permet d'obtenir facilement l'expression de la réaction $\overrightarrow{R_C}$ du mur au point C. La donner en fonction de θ, m et g.
3. En déduire la tension $\overrightarrow{T}$ du fil et la réaction $\overrightarrow{R_B}$ du sol sur l'échelle au point B.

EX3 : Oscillations d'un pendule



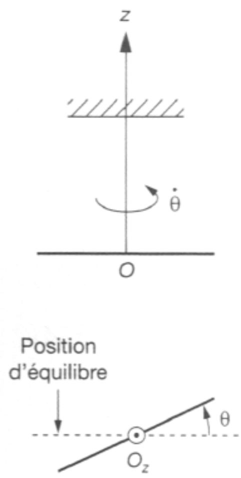
Un point matériel M (masse m) est relié à un fil inextensible (longueur $O_1M = L$, masse négligeable) et à un ressort horizontal de raideur k et de longueur l_0 au repos. Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O_1'. On suppose des petites oscillations quasi horizontales du point M, telles que $O_1'M \ll L$. La position du point M est repérée par l'angle d'inclinaison θ du pendule par rapport à la verticale (angle θ supposé faible).
Établir l'équation du mouvement pendulaire en utilisant le théorème du moment cinétique. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

EX4 : Pendule de torsion

Lors de ses expériences d'électrostatique, qui lui permirent d'en déduire l'expression de l'interaction électrostatique, Coulomb utilisait des pendules de torsion. Une pendule de torsion est constitué d'une tige homogène fixé en son milieu à une ficelle. On fait tourner le bâton sur lui même d'un angle θ afin de tordre la ficelle.

Celle-ci exerce alors un couple de rappel élastique proportionnel à l'angle θ : $\Gamma_e = -C\theta\overrightarrow{u_z}$.

1. À l'instant initial, on écarte le pendule d'un angle θ_0 . Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer la période d'oscillation du pendule.
3. Faire une analogie avec un problème déjà traité.
4. Calculer la puissance P_u du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre les angles θ_1 et θ_2 .
5. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. L'exprimer.
6. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, retrouver l'équation du mouvement du pendule de torsion.



EX5 : Effondrement du soleil

À la fin de sa vie, dans 5 milliards d'années environ, le Soleil s'effondrera en une naine blanche, un astre de forte densité, concentrant la masse du Soleil sur une boule de rayon équivalent au rayon terrestre.

1. On suppose que cette effondrement se fait sans perte significative de masse. Montrer que le moment cinétique scalaire du Soleil par rapport à son axe de rotation reste constant au cours de l'effondrement.
2. Exprimer les moments cinétiques scalaires du Soleil, et de la naine blanche, en fonction de leur masse $M_s = 2.10^{30}$ kg, de leur périodes de rotation $T_s = 1$ mois et T_{NB} , et de leur rayons $R_s = 7.10^5$ km et $R_{NB} \approx R_T = 6400\,\text{km}$.
On rappelle que le moment d'inertie d'une boule homogène de masse m et de rayon R est $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$.
3. Déterminer la période de rotation de la naine blanche.

3 Problème

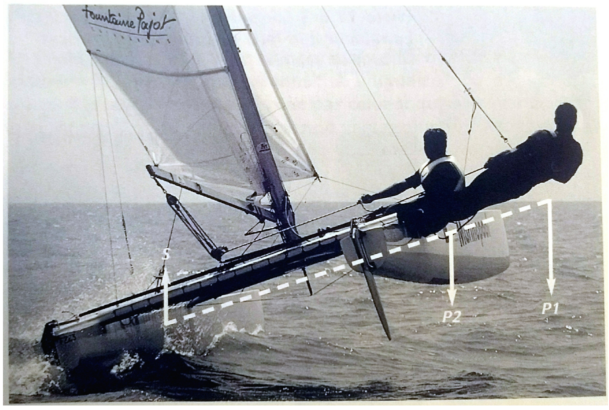
Pb1 : Allongement de la durée du jour

Un réseau mondial de stations d'observations de la Lune effectue régulièrement des tirs laser sur des réflecteurs déposés sur la surface de la lune au cours des missions américaines et soviétiques. Le temps d'aller et retour des signaux laser entre la Lune et la Terre et son évolution systématique ont ainsi permis d'établir que la Lune s'éloigne de la Terre de 3,7 cm par an. Cet éloignement de la Lune est en fait la traduction d'une dissipation d'énergie du système Terre-Lune associée au phénomène des marées. La conséquence est un allongement de la durée du jour sur Terre.

1. Déterminer le moment cinétique de la Terre L_T et de la Lune L_L . On donne : le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R et de masse m autour de son axe de rotation vaut $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$.
2. Déterminer le moment cinétique de la Lune en révolution autour de la Terre L_{orb} . Mouvement supposé circulaire et uniforme.
3. En appliquant la 3e loi de Kepler, montrer que $L_{orb,lune} = M_L\sqrt{GM_Td_{TL}}$.
4. Évaluer numériquement ces trois moments. En déduire lequel des trois termes est négligeable.
5. Montrer que le moment cinétique total du système Terre-Lune se conserve dans le temps.
6. En dérivant le théorème du moment cinétique, déterminer l'allongement de la durée du jour sur 1 siècle.

Données : $M_{Terre} = 5,97\times10^{24}$ kg, $R_{Terre} = 6378$ km, $M_{lune} = 7,34\times10^{22}$ kg, $R_{Lune} = 1737,4$ km, $D_{TL} = 3,83 \times 10^5$ km, $T_L = 28j$.

Pb2 : Catamaran de sport



Sur les catamarans de sport, l'équipier a la possibilité de s'attacher au mat, les pieds posés sur la coque pour équilibrer (remettre à plat) un bateau qui penche. Dans cette situation le corps de l'équipier se retrouve dans l'axe de la plateforme du bateau (trampoline).
Le bateau de l'image est un Tornado de largeur $\ell = 5,84\,\text{m}$, de longueur $L = 6,09\,\text{m}$ de masse $m = 165\,\text{kg}$, la taille du mât est de 9 m. L'équipage est formée de deux personnes, un premier chargé de dirigé le bateau et de masse 70 kg et un équipier de 1,80 m et de 85 kg.

Le but de cette exercice est de déterminer la force maximale du vent dans les voiles que peut encaisser cette équipage avant que l'équilibre soit rompu et que le bateau se retourne.
Vous allez être amener à faire des hypothèses qu'il faudra énoncer clairement en les justifiants.

Hypothèses de bases

— On appelle Oy l'axe formé par la coque qui touche l'eau.
— Le bateau avance à vitesse constante suivant Oy (TRU)
— Le barreur sera approximé à un point matériel situé sur la coque en l'air.
— L'équipier sera modélisé par un solide dont le centre de gravité se situe au niveau de ses épaules (à 50cm de la tête)
— La masse du bateau est équitablement répartie entre les deux coques
— On nomme $\overrightarrow{F}$ la force exercée par le vent dans les voiles, dont le point d'application se situe à un tiers de la hauteur du mat, perpendiculairement au mât.
— Le problème peut se ramener à un problème 2D

aide : on appellera θ l'angle formé par le bateau et la verticale.

Pb3 : Étude d'un moteur

Dans une machine tournante, la partie mobile, qui possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, est soumise à un couple moteur Γ_m constant, ainsi qu'à des frottements visqueux de moment scalaire $M = -\alpha\omega$, où α est la constante de frottement et ω la vitesse de rotation du moteur.

1. Préciser le signe de la constante α.

Arrêt à couple nul : Le moteur tournant à une vitesse angulaire Ω_0 , le couple moteur cesse de s'exercer.

2. Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse angulaire.
3. Préciser le portrait de phase et en déduire la vitesse finale.
4. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\omega(t)$ et proposer un temps caractéristique d'évolution τ . Commenter sa dépendance par rapport à J et α.

Démarrage Le rotor est initialement immobile. Le couple moteur constant est appliqué.

5. Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse angulaire.
6. Préciser le portrait de phase et en déduire la vitesse finale Ω_f .
7. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire.

8. Quelle durée doit-on attendre pour observer une vitesse ne différant pas de la vitesse finale de plus de 5% ?

9. En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie comme $\Gamma_0(1+r\cos\Omega t)$, où r est liée à l'intensité de la perturbation et Ω est sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire sous la forme $\omega(t) = \omega_f + A\cos(\Omega t - \Phi)$ où A et Φ sont des constantes. Quelle est la durée du régime transitoire ?
10. Exprimer A et $\tan\Phi$ en fonction de r, Ω, τ et ω_f. On pourra utiliser la notation complexe.
11. Expliquer pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?