TD : Oscillateurs Harmoniques

EX1 : Oscillateurs moléculaires

La distance qui sépare les atomes des molécules diatomiques oscille autour d'une valeur d'équilibre. Pour l'étude de telles vibrations moléculaires, on utilise le modèle de l'oscillateur harmonique mécanique (ressort de longueur à vide l 0 et de constante de raideur k). Pour le bromure d'hydrogène (HBr), où le rapport entre la masse de l'atome de brome et celle de l'atome d'hydrogène est élevé, on peut admettre que l'atome de brome est fixe dans le référentiel d'observation et que l'atome d'hydrogène oscille autour de sa position d'équilibre, laquelle se trouve à la distance de 141pm de l'atome de brome.

Calculer la constante de raideur k de l'oscillateur harmonique correspondant sachant que sa fréquence propre est $f_0 = 7,674.10^{13}$ Hz et que la masse de l'atome d'hydrogène est $m_H = 1,67.10^{-27}$.

Réponse :
$2\pi f_0 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ alors $k = m\omega_0^2 = 4\pi^2 m f_0^2 = 388\text{N/m}$

EX2 : Diapason

Un diapason vibre à la fréquence du La 4 soit f = 440Hz. On mesure sur une photo l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches : A = 0,5 mm.

1. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ?
2. Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

Réponse :
$X = A\cos(\omega t + \phi)$ donc $\ddot{X} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ et $A_v = A2\pi f = 1,38\,\text{m/s}$, même principe pour l'accélération :$A_a = A4\pi^2 f^2 = 3,82 \cdot 10^3\text{m/ss}$

EX3 : Système masse-ressort vertical

Cet exercice est peu guidé, c'est à vous de faire toutes les étapes nécessaires à sa résolution.

Reprendre le pendule élastique ressort étudié en cours (masse accrochée à un ressort dont l'autre extrémité est fixe), mais en considérant désormais que l'ensemble est vertical dans le référentiel terrestre. On note m la masse de la masse, l_0 la longueur à vide du ressort et k sa raideur. L'axe vertical O_z est orienté vers le bas.

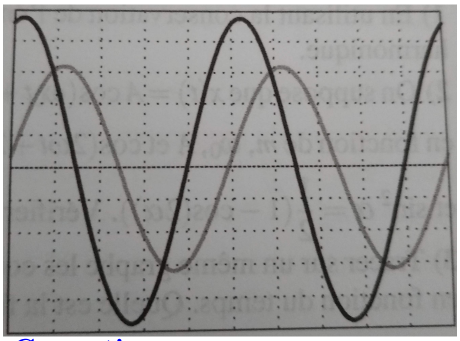
1. Trouver la fréquence propre de cet oscillateur.
2. Quelle est la position d'équilibre du ressort ?
3. Quelles sont les sources d'énergie potentielle du système ?
4. Montrer que l'énergie potentielle peut s'écrire sous la forme $E_p = \frac{1}{2}u^2 + cte$
5. En déduire l'énergie mécanique du système.

Réponse :
$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g$ même équation avec une solution particulière : $\omega_0^2 z_{eq} = g$.
$E_p = \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 - mgz$ sachant que $z = u - z_{eq}$.

$$E_p = \frac{1}{2}k(u - z_{eq} - l_0)^2 - mg(u - z_{eq}) = \frac{1}{2}ku^2 + ku(z_{eq} - l_0) + \frac{1}{2}k(z_{eq} - l_0)^2 \qquad (1)$$

or d'après l'expression de l'équilibre mécanique $ku(z_{eq} - l_0) = ku\frac{mg}{k} = mgu$ donc $cst = \frac{1}{2}k(z_{eq} - l_0)^2 - mgz_{eq}$

EX4 : Détermination d'un déphasage



La figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence : $s_1(t)$ en noir et $s_2(t)$ en gris. Une division de l'axe du temps correspond à 20ms.

1. Déterminer la fréquence des signaux.
2. Calculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1.
3. Quelle est la phase de s_1 au point le plus à gauche de l'écran ?

Correction :

Méthodes

— *Comment déterminer quel signal est en avance sur l'autre ?*
Celui qui est en avance est celui qui est maximum en premier, c'est à dire pour une date plus faible. Sur un écran d'oscilloscope, le temps s'écoule de gauche à droite, donc les dates les plus faibles sont à gauche.

— *Comment déterminer le déphasage $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ entre deux signaux ?*
Soit $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ alors :

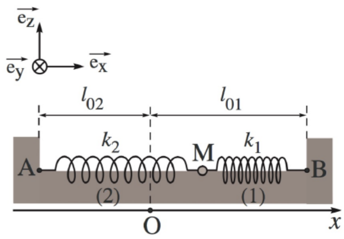
$$s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \Delta\phi + \phi_1) = S_2 \cos(\omega(t + \frac{\Delta\phi}{\omega}) + \phi_1) = S_2 \cos(\omega(t+\tau) + \phi_1)$$

Donc $\Delta\phi = \omega\tau$ avec τ le retard temporel entre les signaux.

1. Les deux signaux ont la même période $T = 0,1$s soit $f = 10\,\text{Hz}$
2. Le signal gris est en retard de 1 carreau, soit $\tau = 20\,\text{ms}$. Ainsi $\Delta\phi = -\frac{2\pi\tau}{T} = \frac{-2\pi}{5} = -1,25\,\text{rad}$
3. À l'instant le plus à gauche de l'écran, s_2 passe par zéro avec une pente positive donc $\phi_2 = -\pi/2$; on en déduit la phase de s_1 à cet instant : $\phi_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{-2\pi}{5} = \frac{-\pi}{10}$.

EX5 : Point matériel relié à deux ressorts

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressort (1) et (2) horizontaux de raideurs k_1 et k_2 , et de longueurs à vide $l_{0,1}$ et $l_{0,2}$ reliés à deux points fixes A et B distants de $(l_{0,1} + l_{0,2}$). Le point M glisse sans frottement le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse x = $\overrightarrow{OM}$.



1. Justifier la position d'équilibre en O du point M .
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de M . En déduire la période des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.
3. À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0 . Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.
4. On suppose maintenant que les deux ressorts sont identiques et que la masse m = 1, 00kg est déplacée de 5, 00cm vers la droite avec une force horizontale de 10,0 N.
   .a) Quelle est la période des oscillations une fois la masse lâchée ?
   .b) Quelle sera sa position au bout de 0, 200s ?
   .c) Un des ressort se casse. Quelle est la fréquence des nouvelles oscillations ?

Réponse :

Si M se trouve en O, alors chaque ressort est à sa longueur d'équilibre, la force de rappel est nulle et le système est au repos. PFD : $m\ddot{x} = -k_1(l_{0,1} - l_1) - k_2(l_2 - l_{0,2}) = (k_1 + k_2)x = kx$ utilisation des conditions initiales, $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ vitesse initiale nulle B=0.
F = kx alors $k = F/x = 2,00 \times 10^2$ N/m et $\omega_0 = 14$ /s et donc $f_0 = 2,2$Hz et $T_0 = 0,45$s.
x(2) = 4.80cm